基于有效场论的QCD相图研究

杜轶伦[1] 李程明[2] 史 潮[3] 徐书生[4] 严 妍[5] 张 正[6]

1（山东高等技术研究院 济南 250100）
2（郑州大学 物理学院（微电子学院） 郑州 450001）
3（南京航空航天大学 核科学与技术系 南京 210016）
4（南京邮电大学 理学院 南京 210023）
5（常州大学 微电子与控制工程学院 常州 213164）
6（南京大学 物理学院 南京 210093）

摘要 量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）相图是高能核物理领域研究的前沿热点。本文基于有效场论的方法，包括Nambu−Jona-Lasinio模型和Dyson-Schwinger方程等，介绍了近期QCD相图研究的多方面进展，包括利用高阶磁化率寻找相变信号，手征不平衡、有限体积和旋转等对相图的影响，以及QCD物态方程在致密星体中的应用。研究发现，重子数高阶涨落的理论结果与实验测量的质子数高阶矩可以较好地符合；手征不平衡、有限体积和旋转对手征凝聚和相图结构都有一定的影响；从有效场论的QCD物态方程出发，可以给出符合脉冲星观测的结果。

关键词 QCD相图，高阶涨落，手征不平衡，有限体积，旋转，致密星

中图分类号 O572.24+3，O571.6

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040009

Review of QCD phase diagram analysis using effective field theories

DU Yilun[1] LI Chengming[2] SHI Chao[3] XU Shusheng[4] YAN Yan[5] ZHANG Zheng[6]

1(*Shandong Institute of Advanced Technology*, *Jinan 250100*, *China*)
2(*School of Physics and Microelectronics*, *Zhengzhou University*, *Zhengzhou 450001*, *China*)
3(*Department of Nuclear Science and Technology*, *Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing 210016*, *China*)
4(*School of Science*, *Nanjing University of Posts and Telecommunications*, *Nanjing 210023*, *China*)
5(*School of Microelectronics and Control Engineering*, *Changzhou University*, *Changzhou 213164*, *China*)
6(*Department of Physics*, *Nanjing University*, *Nanjing 210093*, *China*)

Abstract The quantum chromodynamics (QCD) phase diagram is of great interest to researchers in the field of high energy nuclear physics. We review the present research status of several aspects of this topic. This review includes the search for the phase transition mechanism resulting in high-order baryon number fluctuations, how chiral imbalance, finite volume, and under rotations affect the QCD diagram, and the applications of the equation of states of dense QCD matter in the study of compact stars. The Nambu−Jona-Lasinio model and Dyson-Schwinger equations approach are the most commonly used methods described in this review. It is found that the theoretical results of high-order baryon number fluctuations are in good agreement with the experimental data. The chiral imbalance, finite

泰山学者工程、国家自然科学基金青年项目(No.12005192, No.11905104, No.11905107)、常州大学科研专项基金(No.KYP2202487C)资助
第一作者：杜轶伦，男，1991年出生，2018年于南京大学获博士学位，研究领域为高能核物理，E-mail：yilun.du@iat.cn
收稿日期：2023-01-13，修回日期：2023-03-03
Supported by the Taishan Scholars Program, Youth Program of National Natural Science Foundation of China (No. 12005192, No. 11905104, No. 11905107), Special Research Foundation of Changzhou University (No.KYP2202487C)
First author: DU Yilun, male, born in 1991, graduated from Nanjing University with a doctoral degree in 2018, focusing on high-energy nuclear physics, E-mail: yilun.du@iat.cn
Received date: 2023-01-13, revised date: 2023-03-03

volume, and rotation of quark-gluon plasma (QGP) have a quantitative impact on the chiral condensate and the QCD phase structure. In the study of compact stars, the theoretical results from equation of states of dense QCD matter agree well with pulsar observations. Further research will be required to form a complete understanding of the QCD phase diagram, particularly given the abundance of QGP.

Key words QCD phase diagram, High-order fluctuations, Chiral imbalance, Finite volume, Rotation, Compact stars

强相互作用的基本理论是量子色动力学(Quantum Chromodynamics，QCD)，其具有渐近自由、手征对称性自发破缺和色禁闭三个特性。在高温高密的条件下，核物质被认为会从强子相转变为夸克-胶子等离子体(Quark-gluon Plasma，QGP)相。在这种新型物态中，夸克和胶子不再束缚在强子内部，而是在更大尺度上形成色中性的高温高密物质[1-3]。同时，手征对称性也会获得部分的恢复，表现为夸克的有效质量大大减小[4-5]。美国布鲁克海文国家实验室相对论重离子对撞机(Relativistic Heavy Ion Collider，RHIC)和欧洲核子中心大型强子对撞机(Large Hadron Collider，LHC)的相对论重离子碰撞实验表明，QGP是强耦合的有黏滞性的流体[6-8]，是目前人类已知的温度最高的物质和最完美的流体[9-10]。在非对心碰撞中，实验可以产生已知的最强磁场[11]和涡旋度最强的物质[12]。此外，低温有限密条件下的QCD物质物态方程对于致密星体的研究不可或缺。因此，对有限温有限密条件下核物质相图结构和物态性质的理论研究具有十分重要的物理意义。

目前，广泛用于研究QCD相图的方法有格点QCD[13-15]和有效场论方法，后者包括基于泛函路径积分的Dyson-Schwinger方程组(DSEs)[16-19]、基于有效相互作用拉氏量的Nambu-Jona-Lasinio(NJL)模型[20-22]、Polyakov圈扩展的Nambu-Jona-Lasinio(PNJL)模型[23-25]、手征微扰论[26-28]和夸克-介子模型[29-31]等。本文将着重介绍DSE方法和NJL模型对相图研究的最新进展。

在高温低密的条件下，格点QCD和许多有效场论计算均认为，从强子相到QGP相的物态转变是一个平滑过渡(crossover)[13-26,29,31]；而在低温高密的条件下，格点QCD由于“符号问题”无法开展计算，大多数有效场论的结果表明那里可能发生一级相变[16-26,29,31]。两者之间有一个临界终止点(Critical-End Point，CEP)。因此，实验上希望确定QCD相图的结构和CEP的具体位置，如RHIC的能量扫描(Beam Energy Scan，BES)项目正致力于测量不同碰撞能量下守恒荷的高阶涨落，希望能从中分析获得相变的信号[32-34]。

理论上认为，QCD真空有着非平庸的拓扑构型，可以根据其绕数(winding number)将真空分类[35]。在高温QGP中，非平庸的(绕数不为零的)胶子场构型会在任意时空点被激发出来，它们会改变附近真空的拓扑荷，并进而由手征反常导致夸克螺旋度的翻转，从而产生手征不平衡性(手征荷)，即左手夸克和右手夸克的数量差别[36-40]。研究表明，重离子碰撞产生火球后，手征荷会迅速达到平衡并保持一段相对较长的时间[41-43]。为了更好地理解QCD的相图结构，我们需要研究这种手征不平衡性带来的影响。在实际研究中，人们引入了手征化学势作为手征荷的共轭变量。需要指出的是，由于手征反常，手征荷并不是一个守恒量，引入手征化学势是一种近似处理方法。

现有绝大多数对于QCD相图的理论研究都是热力学极限(系统体积无穷大)下的结果，而实际中相对论重离子碰撞实验所产生的火球体积是有限的。研究估算指出，在Au-Au和Pb-Pb碰撞中，热化后的系统体积在50~250 fm^3之间[44]。此外，RHIC上产生的QGP系统体积最小可低至10 fm^3[45]。严格说来，由于有限体积系统中关联长度不能达到无限大，因此热力学极限下相变点附近的奇异行为将被抑制，例如：原本发散的奇异点变为有限高的峰，而峰的高、宽和位置都可能随着系统体积变化而改变。对此，诸多文献使用有效场论方法研究了有限体积效应对于热密QCD物质性质的影响[46-52]。

在非对心重离子碰撞中产生的QGP的涡旋度可达10^{22} s^{-1}[12]，而致密星表面的转速也可以达到约0.1倍光速[53]。要更加真实地模拟重离子碰撞和致密星的物态，有必要考虑旋转效应的影响。目前，QCD系统的旋转效应主要有两个受关注的方面：一是旋转对QCD相图的影响[54-72]；二是旋转所引起的输运现象[73-81]。前者包括旋转对手征相变、解禁闭相变、π凝聚相变的影响，后者则主要是手征涡旋效应。本文将总结前者最新的进展。

实验室中相对论重离子碰撞产生的是高温有限密核物质，而致密天体是低温高密的核物质。由于“符号问题”，格点QCD在此很难开展计算，因此特别需要采用QCD有效场论的方法提供有限密核物质的物态方程，这对于中子星的研究具有非常重要的意义[82-83]。反过来，天文观测到的中子星的质量-

半径关系、潮汐形变参数等信息也将对有限密QCD的研究提出约束[82-99]。

1 有效场论方法简介

1.1 Nambu-Jona-Lasinio模型

QCD的拉氏量密度为：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F_{a}^{\mu\nu}+\bar{\psi}\left(i\gamma\cdot D-M\right)\psi \tag{1}$$

其中：规范场张量$F_{\mu\nu}^{a}$为：

$$F_{\mu\nu}^{a}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}+g_{s}f_{abc}A_{\mu}^{b}A_{\nu}^{c} \tag{2}$$

$M=\mathrm{diag}\left(m_{\mathrm{u}},m_{\mathrm{d}},m_{\mathrm{s}},m_{\mathrm{c}},m_{\mathrm{b}},m_{\mathrm{t}}\right)$是六味流夸克质量矩阵，$g_{\mathrm{s}}$是强耦合常数。

QCD相图研究中通常只考虑两味或三味夸克的情形，不考虑c、b、t夸克，即$N_{\mathrm{f}}=2$或$N_{\mathrm{f}}=2+1$，$N_{\mathrm{c}}=3$。两味的NJL模型对夸克之间的相互作用做四费米子相互作用近似，且满足手征不变性，其拉氏量写作[100-101]：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}}=\bar{\psi}\left(i\gamma\cdot\partial-m\right)\psi+g\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^{2}+\left(\bar{\psi}i\gamma_{5}\tau\psi\right)^{2}\right] \tag{3}$$

式中：u、d夸克的质量被认为相等且等于m、g是有效耦合常数；τ是味道空间的Pauli矩阵。NJL模型是不可重整的有效场论，因此，在计算中还需要引入正规化方案，通常采用的方案有4种，包括非协变的三维动量截断方案、协变的四维动量截断方案、Pauli-Villars正规化方案和固有时正规化方案[88]。其中：动量截断方案是对积分动量引入硬截断Λ，而固有时正规化方案则是先对积分表达式进行Schwinger参数化，再对参数(固有时)引入积分下限，这相当于在动量空间引入软截断。在经典的NJL模型中，一般假定m、g和正规化参数与系统的温度和密度无关。

在NJL模型的实际计算中，人们往往需要引入平均场近似来处理相互作用项，通常只保留$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$和$\langle\bar{\psi}\gamma^{0}\psi\rangle$的相关项，它们与夸克质量和化学势的修正效应有关。这里$\langle O\rangle$表示算符O在巨正则系综下的平均值。在平均场近似下，两味夸克有效质量M满足能隙方程：

$$M=m-2gN_{\mathrm{f}}\langle\bar{\psi}\psi\rangle \tag{4}$$

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle=-M\frac{N_{\mathrm{c}}}{\pi^{2}}\int\frac{p^{2}}{E}\left(1-n\left(p,\mu\right)-m\left(p,\mu\right)\right)\mathrm{d}p \tag{5}$$

其中：

$$n\left(p,\mu\right)=\frac{1}{1+\exp\left[\beta\left(E-\mu\right)\right]}$$

$$m\left(p,\mu\right)=\frac{1}{1+\exp\left[\beta\left(E+\mu\right)\right]}$$

三味的NJL模型除了四费米子相互作用外，还需要包含六费米子相互作用，其拉氏量写作[82,102-103]。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}}=\bar{\psi}\left(i\gamma\cdot\partial-m\right)\psi+G\left[\left(\bar{\psi}\lambda_{i}\psi\right)^{2}+\left(\bar{\psi}i\gamma_{5}\lambda_{i}\psi\right)^{2}\right]-K\left(\det\left[\bar{\psi}\left(1+\gamma^{5}\right)\psi\right]+\det\left[\bar{\psi}\left(1-\gamma^{5}\right)\psi\right]\right) \tag{6}$$

其中：列矢量$\psi=(\mathrm{u},\mathrm{d},\mathrm{s})$是三种味道、三种颜色的夸克场，即$N_{\mathrm{f}}=3$，$N_{\mathrm{c}}=3$。$m=\mathrm{diag}\left(m_{\mathrm{u}},m_{\mathrm{d}},m_{\mathrm{s}}\right)$是流夸克质量矩阵。$\lambda^{a}$是味道空间的Gell-Mann矩阵，$a$=1，2，3，…，8，$\lambda^{0}=\sqrt{\frac{2}{3}}I$。第二项表示四点标量-赝标量相互作用，它在手征$\mathrm{U}(3)_{\mathrm{L}}\otimes\mathrm{U}(3)_{\mathrm{R}}$变换下是不变的，这里忽略了矢量-轴矢量相互作用。最后一项表示六点相互作用，它破坏了轴$\mathrm{U}(1)_{\mathrm{A}}$对称性。但是它在$\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{L}}\otimes\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{R}}$变换下是不变的。这些四点和六点相互作用形式都是根据QCD的手征对称性构造的。在平均场近似下，三味夸克有效质量M满足能隙方程：

$$M_{i}=m_{i}-4G\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{i}+2K\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{j}\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{k} \tag{7}$$

对于NJL模型中的相互作用部分，人们可以做数学上等价的Fierz变换，考虑场算符的重排效应[104]。本文仅讨论对四费米子相互作用部分作Fierz变换。对于两味NJL模型，Fierz变换后拉氏量为：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{F}}=\bar{\psi}\left(i\gamma\cdot\partial-m\right)\psi+\frac{G}{8N_{\mathrm{c}}}\left[2\left(\bar{\psi}\psi\right)^{2}+2\left(\bar{\psi}i\gamma_{5}\tau\psi\right)^{2}-2\left(\bar{\psi}\tau\psi\right)^{2}-2\left(\bar{\psi}i\gamma_{5}\psi\right)^{2}-4\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)^{2}-4\left(\bar{\psi}i\gamma^{\mu}\gamma_{5}\psi\right)^{2}+\left(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\right)^{2}-\left(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\tau\psi\right)^{2}\right] \tag{8}$$

对于三味NJL模型，Fierz变换后拉氏量为：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{F}}=\bar{\psi}\left(i\gamma\cdot\partial-m\right)\psi-\frac{G}{2}\left[\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\lambda_{a}^{\mathrm{C}}\psi\right)^{2}-\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\lambda_{a}^{\mathrm{C}}\psi\right)^{2}\right]-K\left(\det\left[\bar{\psi}\left(1+\gamma^{5}\right)\psi\right]+\det\left[\bar{\psi}\left(1-\gamma^{5}\right)\psi\right]\right) \tag{9}$$

式中：λ_{a}^{C}是色空间的Gell-Mann矩阵。可以看到，除了$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$，Fierz变换后还会出现$\langle\bar{\psi}\gamma^{0}\psi\rangle$的相关项，因此做平均场近似应该考虑拉氏量在Fierz变换所揭示的各项对$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$和$\langle\bar{\psi}\gamma^{0}\psi\rangle$隐藏贡献，传统的方法是取拉氏量在Fierz变换前后的平均值。在文献[105]中，作者采取了一个新的自洽的处理方式，即对NJL模型在Fierz变换前后分别引入权重因子$(1-\alpha)$和α，并作线性组合，$\mathcal{L}_{\mathrm{R}}=(1-\alpha)\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}}+\alpha\mathcal{L}_{\mathrm{F}}$。这事实上提供了一个额外的自由度去考察相变研究中的可能性。我们将在致密星的研究中用到这样的处理方法。

系统的巨配分函数由下式给出：

$$\ln Z = \ln\left[Tre^{-\beta(\mathcal{H}-\mu_i\mathcal{N}_i)}\right] \tag{10}$$

其中：$\beta = 1/T$。人们可以在此基础上获得系统的其他热力学性质，包括高阶磁化率等。

1.2 Dyson-Schwinger方程方法

在有限温量子色动力学中，巨正则系综的配分函数可以用泛函路径积分方法表示为：

$$Z = N'\int_{BC} D[\bar{\psi}\psi A_\mu]\cdot \exp\left(-\int_0^\beta \mathrm{d}\tau\int \mathrm{d}x^3\ [\mathcal{L}_{QCD} + \mu\bar{\psi}\gamma^0\psi]\right) \tag{11}$$

下标BC指代夸克和胶子场需满足的边界条件：

$$\psi(0,\vec{x}) = -\psi(\beta,\vec{x})$$
$$A_\mu(0,\vec{x}) = A_\mu(\beta,\vec{x}) \tag{12}$$

一般地，人们可以采用关联函数计算相应的圈图来求解配分函数，而关联函数本身也包含了诸多的热力学信息，因而求解这些关联函数具有重要意义。

有限温量子场论中的关联函数之间满足Dyson-Schwinger方程组，这些方程组可以通过泛函微商方法得到，因而包含了非微扰效应。其中，有限温下的完全夸克传播子所满足的DS方程形式为[106-107]：

$$S^{-1}(\tilde{\omega}_n,\vec{p};T,\mu) = S_0^{-1}(\tilde{\omega}_n,\vec{p}) + T\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\times g^2D_{\mu\upsilon}(\Omega_{nl},\vec{p}-\vec{q};T,\mu)\frac{\lambda^a}{2}\gamma_\mu S(\tilde{\omega}_l,\vec{q};T,\mu)\times \frac{\lambda^a}{2}\Gamma_\upsilon(\tilde{\omega}_n,\tilde{\omega}_l,\vec{p},\vec{q};T,\mu) \tag{13}$$

其中：$\Omega_{nl} = \tilde{\omega}_n - \tilde{\omega}_l$，$D_{\mu\upsilon}$是完全胶子传播子；$\Gamma_\upsilon$是完全的夸克胶子顶角。由于夸克场所要满足的边界条件，其松原频率只能取一系列分立值$\tilde{\omega}_n = (2n+1)\pi T + i\mu,\ n\in\mathbb{Z}$。严格说来，DS方程组本身不封闭，因而无法自洽求解。实际中，人们往往通过引入截断和模型来进行求解。例如，最常用的是彩虹截断（即$\Gamma_\upsilon = \gamma_\upsilon$）和Maris-Tandy胶子相互作用模型[108-109]。作为改进，人们引入更加复杂的截断方案以及借鉴格点QCD对顶角和胶子传播子的模拟结果[110-113]。一般来说，超越彩虹近似会给手征相图带来定量改进，但没有定性改变。为了求解方程(3)，人们对夸克传播子进行一般的旋量结构分解，其一般形式为：

$$S(\tilde{\omega}_n,\vec{p}) = i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\sigma_1(\tilde{\omega}_n,\vec{p}^2;T,\mu) + i\gamma_4\tilde{\omega}_n\sigma_2(\tilde{\omega}_n,\vec{p}^2;T,\mu) + \sigma_3(\tilde{\omega}_n,\vec{p}^2;T,\mu) + i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\gamma_4\sigma_4(\tilde{\omega}_n,\vec{p}^2;T,\mu) \tag{14}$$

将方程(14)代入(13)，两边分别乘以$\{i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}, i\gamma_4\tilde{\omega}_n, I_4, i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\gamma_4\}$后取迹，可以得到关于$\sigma_i$的非线性方程组，最后通过数值计算进行求解。

DS方程也可以研究有限体积和手征不平衡对QCD相图的影响，但此时相应的夸克传播子会具有更多的旋量结构。例如，为了研究手征不平衡对于QGP性质的影响，人们唯象地引入手征化学势来表征短时间内近似守恒的手征荷，于是在式(11)中引入$\mu_5\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi$项。此轴矢项的引入使得夸克传播子获得额外的旋量结构，其一般形式为[114]：

$$S(\tilde{\omega}_n,\vec{p};T,\mu,\mu_5) = i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\sigma_1' + i\gamma_4\tilde{\omega}_n\sigma_2' + \sigma_3' + i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\gamma_4\sigma_4' + (i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\sigma_5' + i\gamma_4\tilde{\omega}_n\sigma_6' + \sigma_7' + i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\gamma_4\sigma_8')\cdot\gamma_5 \tag{15}$$

其中：8个标量函数σ_i'可以用前述方法进行数值求解。

此外，通过对夸克和胶子场在空间方向取一定的边界条件，DS方程可以研究相应的有限体积效应。例如，在一个边长为L的立方体中，选取边界条件[106,115]：

$$\psi(\tau,0,0,0) = -\psi(\tau,L,0,0)$$
$$A_\mu(\tau,0,0,0) = A_\mu(\tau,L,0,0) \tag{16}$$

其中：已将空间方向矢量分量明显写出，注意空间三个方向等价。此时夸克的动量变为离散值$q_x\to(2l_x+1)\pi/L$，胶子则有$q_x\to 2l_x\pi/L$，而方程(13)中的动量积分变为离散求和：

$$\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\to\frac{1}{L^3}\sum_{l_x=-\infty}^{\infty}\sum_{l_y=-\infty}^{\infty}\sum_{l_z=-\infty}^{\infty} \tag{17}$$

此时有限温有限化学势下的夸克传播子的一般展开形式为：

$$S(\tilde{\omega}_n,\vec{p}_n;T,\mu,\mu_5) = i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}_n\sigma_1(\tilde{\omega}_n,\vec{p}_n^2;T,\mu,\mu_5) + i\gamma_4\tilde{\omega}_n\sigma_2(\tilde{\omega}_n,\vec{p}_n^2;T,\mu,\mu_5) + \sigma_3(\tilde{\omega}_n,\vec{p}_n^2;T,\mu,\mu_5) + i\vec{\gamma}\cdot\vec{p}_n\gamma_4\sigma_4(\tilde{\omega}_n,\vec{p}_n^2;T,\mu,\mu_5), \tag{18}$$

其中：$\vec{p}_n = \left((2n_x+1)\pi/L,\ (2n_y+1)\pi/L,\ (2n_z+1)\pi/L\right)$。

2 利用守恒荷高阶涨落寻找临界点

确定QCD的相图结构，尤其是寻找临界终止点是有限温有限密QCD研究中最重要的目标之一，理论和实验在该方向上都做了相当多的探索。相变理论认为，守恒荷的涨落对QCD相图CEP附近的临界行为非常敏感，而实验上可以通过逐事例的分析来获得相关的粒子多重数分布的涨落。目前，人们基于NJL模型[116-118]、PNJL模型[119-121]、Dyson-Schwinger方程[122-124]、手征微扰论[125]、准粒子模型[126]和夸克介子模型[127]进行了相关的计算，并和实验数据进行了比较。

考虑热平衡态下QCD的巨正则系综，系统的压

强与配分函数有如下关系：

$$\frac{P}{T^4} = \frac{1}{VT^3}\ln\left[Z\left(V,T,\mu_B,\mu_Q,\mu_S\right)\right] \tag{19}$$

守恒荷(重子数B、电荷数Q、奇异数S)的高阶磁化率可以通过压强P对重子数B、电荷数Q、奇异数S等守恒荷的化学势的高阶偏导数定义为：

$$\chi_{ijk}^{BQS} = \frac{\partial^{i+j+k}\left[P/T^4\right]}{\partial\left(\mu_B/T\right)^i\partial\left(\mu_Q/T\right)^j\partial\left(\mu_S/T\right)^k} \tag{20}$$

而实验可测的多重数分布的累积量(Cumulants)可以和高阶磁化率按如下方式关联起来：

$$C_{ijk}^{BQS} = \frac{\partial^{i+j+k}\ln\left[Z\left(V,T,\mu_B,\mu_Q,\mu_S\right)\right]}{\partial\left(\mu_B/T\right)^i\partial\left(\mu_Q/T\right)^j\partial\left(\mu_S/T\right)^k} = VT^3\chi_{ijk}^{BQS} \tag{21}$$

对于守恒荷N的任意分布，我们可以定义其高斯宽度σ为：

$$\sigma^2 = \left\langle(N-\langle N\rangle)^2\right\rangle \tag{22}$$

而其高阶涨落的偏度S(Skewness)和峰度κ(Kurtosis)定义为：

$$S\sigma = R_{32} = m_1 = \frac{C_3}{C_2} = \frac{\chi_3}{\chi_2} \tag{23}$$

$$\kappa\sigma^2 = R_{42} = m_2 = \frac{C_4}{C_2} = \frac{\chi_4}{\chi_2} \tag{24}$$

这里列出了不同文献中采用的符号，C_n和χ_n是单一守恒荷的n阶累积量和磁化率的简单表示。这些量约去了系统的体积效应，是归一化的物理量，利用它们可以更好地进行理论计算和实验数据的比较。

对于三味QCD系统，重子数B、电荷数Q、奇异数S等守恒荷的化学势和u, d, s夸克的化学势的关系为：

$$\mu_u = \frac{1}{3}\mu_B + \frac{2}{3}\mu_Q \tag{25}$$

$$\mu_d = \frac{1}{3}\mu_B - \frac{1}{3}\mu_Q \tag{26}$$

$$\mu_s = \frac{1}{3}\mu_B - \frac{1}{3}\mu_Q - \mu_S \tag{27}$$

其中：式(27)两边用大小写区分s夸克的化学势和奇异数S的化学势。人们可以利用式(25~27)进行化学势的转换，计算守恒荷的高阶涨落，具体可以参见文献[116]。

实验上已经测量了净质子数、净电荷数、净K介子数和净Λ重子数的涨落对碰撞能量的依赖[128–131]。通过将原子核的碰撞能量从高值调整到低值，可以改变高能核碰撞中产生的热密QCD物质的温度和重子化学势。需要指出的是，实验上并不能直接测量重子数涨落，这主要是因为不带电的重子，例如中子，无法被大部分的探测器观测到。幸运的是，文献[132–133]论证了在同位旋对称下，质子数涨落和重子数涨落可以相互表达。文献[134]论证了在QCD临界点附近，净质子数涨落可以作为重子数涨落的近似替代。人们也从净质子数的$\kappa\sigma^2$随碰撞能量的依赖中观察到了非单调行为，这被认为是可能的临界点信号[32–34]。电荷数主要由π介子主导，但理论认为π介子与临界点附近涨落的耦合弱于质子。此外，由于共振态衰变效应、统计误差等因素，人们可能无法从电荷数涨落中观察到较强的临界点信号[33,135]。在奇异数涨落中，相比于Λ重子，K介子占主导地位，其涨落可以作为奇异数涨落的一个近似替代。然而在目前较少的实验数据统计下，人们还无法从K介子数高阶涨落之比随能量的依赖中确认其中的非单调性行为[131]。基于上述原因，在当前的许多理论研究中，人们将重子数涨落和实验上测量的净质子数涨落进行比较，这将是本节介绍的重点内容。

理论计算的第一步考虑的往往是热力学极限下的无限大系统，忽略了系统的体积效应和形状。由于对心碰撞(0%~5%中心度)的对称性较高等原因，人们很自然地选择将理论计算结果与对心碰撞的实验数据进行比较。通过理论计算得到有限温有限密下高阶重子数涨落后，为了和实验测量的净质子数涨落对碰撞能量的依赖关系做比较，我们还需要通过选取或拟合实验数据来确定不同碰撞能量下的系统在化学freeze-out时的温度和化学势[136–137]。图1(a)是NJL模型给出的μ_B - T相图和三条作者猜想的系统在不同碰撞能量下freeze-out点组成的曲线[116]。这些猜想的freeze-out曲线在低密区域和平滑过渡线重合，在高密区域通常都要低于平滑过渡线或一级相变线。系统在不同碰撞能量$\sqrt{s_{NN}}$下freeze-out时的温度和重子化学势μ_B的关系可以由实验数据拟合给出，并一般以如下形式参数化[138–139]：

$$\mu_B = \frac{a}{1+b\sqrt{s_{NN}}} \tag{28}$$

在文献[116]中选取了参数a = 1.308 GeV，b = 0.273 GeV^{-1}在NJL模型中开展了计算。

图1(b)、(c)展示了NJL模型给出的沿着这三条猜想的freeze-out曲线获得的高阶重子数磁化率比值$m_1(B)$、$m_2(B)$与碰撞能量$\sqrt{s_{NN}}$之间的关系。图2和图3中的绿色星形数据点给出了RHIC的STAR实验组束能量扫描项目测量的Au-Au碰撞在不同能量下0%~5%中心度的净质子数的各阶涨落。我们

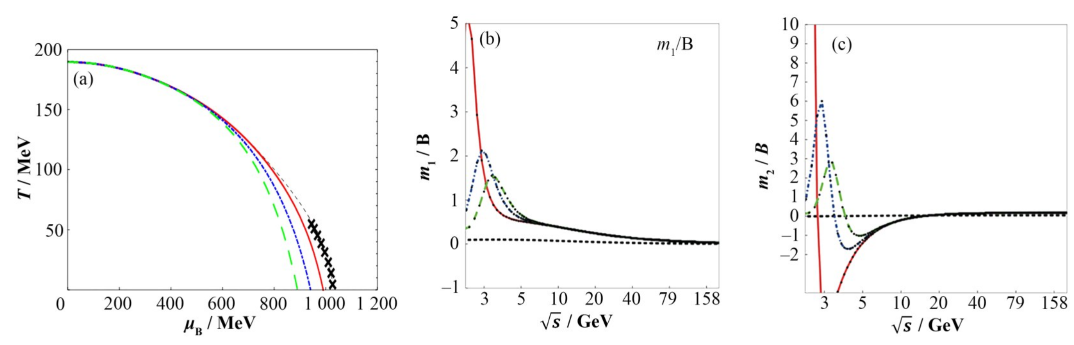


图1 (a) 最右曲线是NJL模型给出的相图，其中虚线表示平滑过渡，符号×表示一级相变，连接处为CEP；其他三条线是假设的freeze-out曲线，(b、c) 沿着图(a)三条freeze-out曲线获得的高阶磁化率比值$m_1(B)$、$m_2(B)$与碰撞能量$\sqrt{s_{NN}}$之间的关系[116]

Fig.1 (a) The rightmost curve represents the phase diagram derived using the Nambu−Jona-Lasinio (NJL) model, the dashed line of the rightmost curve denotes the crossover, the symbol × denotes the first-order phase transition, and the junction where the dashed line and the crosses meet is a critical endpoint (CEP). The other three lines in the left panel are the hypothetical freeze-out curves. (b, c) The ratios of the high-order susceptibilities $m_1(B)$ and $m_2(B)$ compared to the collision energy $\sqrt{s_{NN}}$ obtained along the three freeze-out curves in (a)[116]

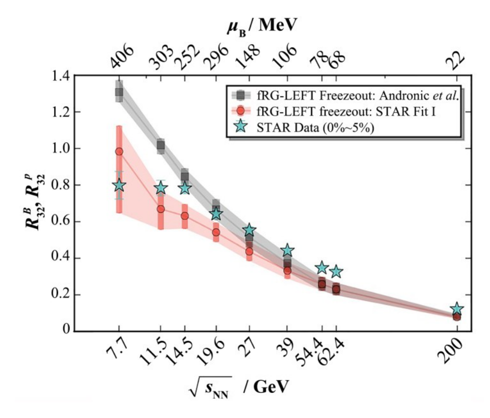


图2 STAR测量的Au+Au碰撞中心度为0%~5%的R^p_{32}−$\sqrt{s_{NN}}$的实验结果以及基于重整化群的手征微扰论的R^B_{32}−$\sqrt{s_{NN}}$理论结果[125]

Fig.2 Experimental result from measuring R^p_{32}, relative to the collision energy, $\sqrt{s_{NN}}$ measured by the STAR experiment for an Au+Au collision with 0%~5% centrality, and the theoretical results of R^B_{32} relative to $\sqrt{s_{NN}}$ from the renormalization-group-based chiral perturbation theory[125]

可以看到，在高能区域NJL模型的结果符合实验数据的基本趋势，$m_1(B)$(即$S\sigma$或R^B_{32})正定且单调下降；$m_2(B)$(即$\kappa\sigma^2$或R^B_{42})正定且单调上升，但是其值远小于1，与实验数据相差较大。在低能区域，三条曲线不再重合，$m_1(B)$和$m_2(B)$均给出了不同的行为，并且没有曲线给出如图2绿色星形数据点所示的质子数R^p_{32}在$\sqrt{s_{NN}}$为7.7~14.5 GeV区间的平台特征；同时，三条曲线均给出了$m_2(B)$先下降再上升的特征，但下降时$m_2(B) < 1$所对应的碰撞能量位置(小于5 GeV)均低于图3中相应的实验值(约10 GeV)。总的来说，NJL模型可以给出实验数据的定性行为。

另一方面，在一个包含了矢量相互作用的NJL模型计算中，相图里没有CEP和一级相变，却同样

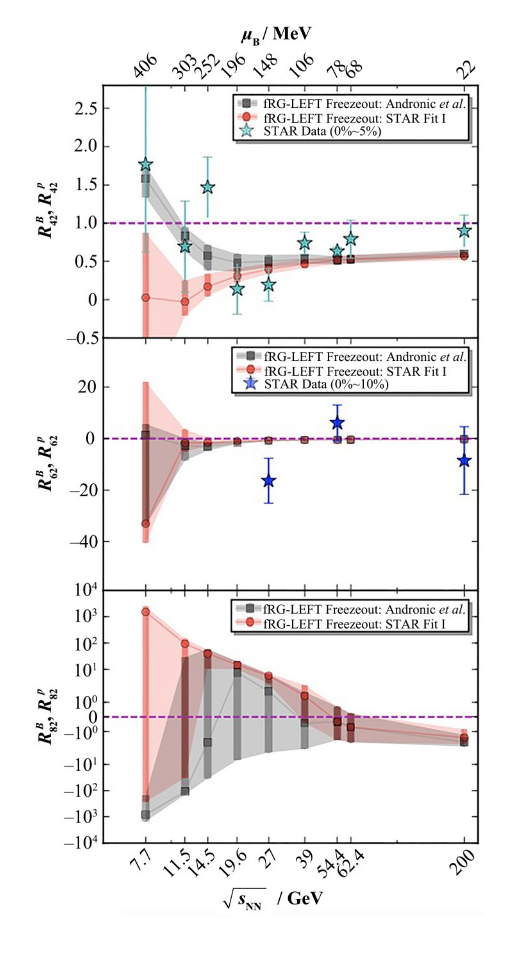


图3 STAR测量的Au+Au碰撞中心度为0%~5%的R^p_{n2}−$\sqrt{s_{NN}}$的实验结果以及基于重整化群的手征微扰论的R^B_{n2}−$\sqrt{s_{NN}}$计算结果[125]

Fig.3 Experimental result from measuring R^p_{n2} relative to the collision energy $\sqrt{s_{NN}}$ measured by the STAR experiment for Au+Au collisions with 0%~5% centrality, and the theoretical results of R^B_{n2} relative to $\sqrt{s_{NN}}$ from the renormalization-group-based chiral perturbation theory[125]

可以得到了$\kappa\sigma^2-\sqrt{s_{NN}}$曲线的非单调行为[117]。这是一个$\kappa\sigma^2-\sqrt{s_{NN}}$曲线的非单调行为不是来自于CEP的例证。

基于手征微扰论和重整化群的理论计算对R_{32}^B和R_{42}^B较好地符合了零密格点QCD和有限密STAR实验的结果。有限密的STAR实验结果如图2和图3中灰色和红色曲线(对应不同的freeze-out曲线)所示，且该方法给出了更高阶的R_{62}^B和R_{82}^B的预言[125]。然而，很好地符合格点QCD和STAR实验关于R_{32}^B和R_{42}^B的结果还不能直接帮助我们理解QCD的相图结构，尤其是确定临界点的位置。在该工作中，拟合STAR实验数据得到的freeze-out曲线离该理论所给出的临界终止点的位置较远，作者认为$\kappa\sigma^2-\sqrt{s_{NN}}$曲线的非单调行为起源于平滑过渡区域在大化学势处变得狭窄，而不是临界点。

文献[121]探讨了PNJL模型在零密和有限密情形下R_{42}^B的计算结果。通过与NJL模型以及格点QCD在零化学势下的R_{42}^B结果的对比，强调了胶子动力学对R_{42}^B大小的重要贡献。此外，还通过假设不同的freeze-out曲线探讨了STAR实验测量的$R_{42}^B-\sqrt{s_{NN}}$关系所包含的信号，认为其中峰结构的出现是靠近CEP的表现，而凹陷出现的原因则更加复杂，它和freeze-out曲线与手征以及解禁闭相变线的相对位置有关，但不能作为CEP存在的证据。

总结来看，目前NJL模型、PNJL模型和手征微扰论的结果都支持$\kappa\sigma^2-\sqrt{s_{NN}}$曲线的非单调行为不是来自于CEP。未来人们需要进一步地积累实验数据，并考虑其他更敏感的观测量来探究临界点的位置。

3　现实重离子碰撞条件下QCD相图的研究

3.1　手征不平衡效应

在相对论重离子碰撞实验中产生的高温夸克-胶子等离子体状态下，右手手征夸克数与左手手征夸克数可以不相等，通常可以使用两者的密度之差来表示手征不平衡性，即：

$$n_5 = n_R - n_L \tag{29}$$

在非对心碰撞条件下，伴随着强磁场(eB可达10^{18} G[11])，手征不平衡会导致手征磁效应，即产生沿着磁场方向的感应电流[140–141]。

手征不平衡在重离子碰撞过程中持续的时间与重离子碰撞产生的火球的持续时间相当，因此，在手征不平衡状态下，可以认为手征荷密度($n_5=\bar\psi\gamma_4\gamma_5\psi$)是一个近似的守恒量。根据巨正则系综理论，可以引入相应的手征化学势μ_5，并在拉格朗日密度中加入$\mu_5\bar\psi\gamma_4\gamma_5\psi$项来研究手征不平衡的QCD系统的热力学性质[140]。Fukushima与Ruggieri首次使用PNJL模型对$\mu_5\neq 0$的QCD系统进行研究[141]。计算结果表明，随着μ_5从零开始增加，在T-μ平面内的CEP逐渐向T轴移动。当$\mu_5=\Lambda_5^c$~400 MeV时，CEP移动到了T轴上，通常将T-μ_5平面内的CEP称作CEP$_5$。使用线性σ模型与夸克-介子模型也得到了类似的结论[142–143]。因此，文献[143]提出，可以使用CEP$_5$与T-μ平面内的CEP建立映射关系，从而通过CEP$_5$的位置来推测CEP的位置。

然而，文献[144]中，格点QCD的研究发现T-μ_5平面内并不存在手征相变点，也没有CEP$_5$。这与前面所提到的几种模型研究的结果都不同。对此，文献[145–147]在DSE框架下系统研究了有限手征化学势QCD系统的手征相图，包括CEP的位置。我们采用了如下三种有效胶子相互作用模型：

模型I：可分离模型：

$$g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(\tilde p_k-\tilde q_n,\mu_5)=\delta_{\mu\nu}[D_0 f_0(p_k^2)f_0(q_n^2)+D_1 f_1(p_k^2)p_k\cdot q_n f_1(q_n^2)] \tag{30}$$

其中：$\tilde p_k=(\vec p,\tilde\omega_k)$，$\tilde q_n=(\vec q,\tilde\omega_n)$，$\vec p,\vec q$分别是夸克-胶子顶点上夸克-反夸克的三维动量；$f_0(q_n^2)=\exp(-q_n^2/\Lambda_0^2)$，$f_1(q_n^2)=\exp(-q_n^2/\Lambda_1^2)$。其中，模型参数分别取为$\Lambda_0=0.638$ GeV，$\Lambda_1=1.21\Lambda_0$，$D_0\Lambda_0^2=260$，$D_1\Lambda_1^4=130$，流夸克质量取为$m=5.3$ MeV[145,148]。

模型II：Maris-Tandy(MT)模型：

$$g^2 D_{\mu\nu}^{\text{eff}}(k)=T_{\mu\nu}(k)D(k^2) \tag{31}$$

$$D(k^2)=D_0\frac{4\pi^2}{\sigma^6}k^2 e^{-\frac{k^2}{\sigma^2}} \tag{32}$$

其中：$T_{\mu\nu}(k)=\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$是横向的投影算符。模型参数通过拟合π介子质量($m_\pi=138$ MeV)与衰变常数($f_\pi=131$ MeV)来确定，$D_0=0.93$ GeV^2，$\sigma=0.4$ GeV，流夸克质量$m=5$ MeV[146,149]。

模型III：Qin-Chang(QC)模型：

$$g^2 D_{\mu\nu}(k)=T_{\mu\nu}(k)\frac{8\pi^2}{\sigma^4}D\,e^{-\frac{k^2}{\sigma^2}} \tag{33}$$

其中：模型参数$D=1$ GeV^2，$\sigma=0.6$ GeV[150]。

在这三种有效相互作用模型中，都只保留了红外部分。

在$\mu_5=0$，$\mu_B=0$的情况下，与PNJL模型、夸克-介子模型、线性σ模型以及格点QCD一样，随着温度T的增加，不存在相变点。而当$\mu_5\neq 0$时，我们仍然计算T-μ平面的相图，模型I的结果如图4所示。

可以看出，随着μ_5的增加，CEP先是向T轴靠近，当μ_5 = 190 MeV时CEP开始远离T轴。也就是说，无论μ_5取何值，在$\mu = 0$时都不会出现手征相变。这与前面所提到的有效模型研究的结论相反，与格点QCD的结论一致。文献[146−147]分别采用了在强子物理中广泛使用的模型II和模型III研究CEP_5的存在性问题。如图5所示，在$\mu = 0$时，热密QCD系统不存在相变点，两种模型给出的CEP随μ_5的变化曲线定性一致。在文献[151]中，研究了DSEs的T - μ_5平面和μ - μ_5平面的CEP随模型参数的影响，结果表明，不存在CEP_5的结论不会随着模型参数的改变而改变。我们在DSEs框架下的三种模型研究取得一致结果，并且与格点QCD的结果一致。

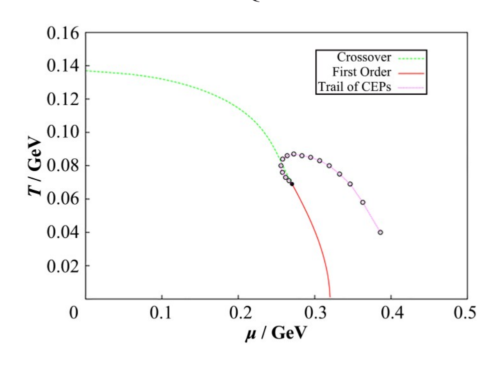


图4 可分离模型的手征相图以及CEP随μ_5的变化[145]
Fig.4 The chiral phase diagram from the separable model and the variation of the critical endpoint (CEP) relative to μ_5 values[145]

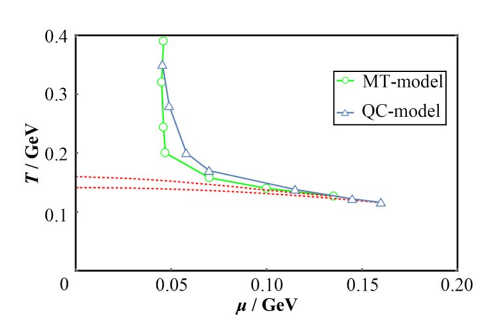


图5 MT模型与QC模型CEP随着μ_5的变化，空心圆与三角形从右向左分别对应μ_5 = (0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.6,0.8) GeV[147]
Fig.5 The variation of the critical endpoint (CEP) relative to μ_5 calculated via the MT model and QC model, where the hollow circles and triangles from right to left correspond to μ_5 = (0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.6,0.8) GeV, respectively[147]

关于CEP_5是否存在，NJL模型、PNJL模型的计算结果与格点QCD、DSEs的结果存在分歧。由于NJL模型是不可重整化的，模型的正规化方案与截断参数可能对结果产生定性影响。文献[152]讨论了模型的不同截断方案对手征凝聚的影响，以及其对CEP_5存在性的影响。研究表明，NJL模型的截断方案会导致有限手征化学势下的相图发生定性变化，其主要差别来自于硬截断与软截断在温度依赖项的贡献。当采用软截断时，包含更多大动量夸克模式的贡献，结果与格点QCD和DSE的结果一致。文献[151]研究了PNJL模型中CEP的位置随耦合常数与截断的变化，结果如图6所示。发现，当耦合常数不剧烈变化的情况下，存在一个临界硬截断Λ_c，当截断$\Lambda < \Lambda_c$时，不存在CEP_5。当$\Lambda \approx \Lambda_c$时的计算将包含更多的大动量夸克模式，这部分将显著改变CEP在μ - μ_5平面上投影的走向，此时的结果与格点QCD与DSE不符。

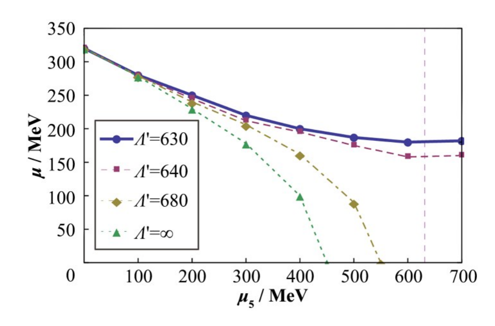


图6 PNJL模型下温度依赖项截断参数对CEP在μ - μ_5平面上投影的影响[151]
Fig.6 Influence of the truncation parameter on temperature-dependent term of the critical endpoint (CEP) in terms of its projection onto the μ - μ_5 plane within the Polyakov-loop-extended Nambu−Jona-Lasinio (PNJL) model[151]

3.2 有限体积效应

随着碰撞参数的变化，非对心重离子碰撞中会产生体积较小的QGP，且近年来研究表明，p-Pb碰撞所产生的小体积系统也表现出部分QGP性质[153−154]，因此，有必要研究小体积效应对QCD相图的影响。

在热力学极限下，有限温场论中费米子场和玻色子场在温度上分别取反周期边界条件和周期边界条件，但在空间方向上没有限定。此时，通过对夸克和胶子场在空间方向引入边界条件，可以研究有限体积效应。例如，为了方便计算，可以选取三维立方体进行研究，并对费米子场和玻色子场在空间上分别选取反周期边界条件和周期边界条件，此时无穷体积下的连续动量变为一系列离散频率。据此，文献[155]采用DS方程方法，计算了有限体积效应对于有限温QCD手征相图的影响，发现夸克手征凝聚随着系统体积减小而减小，且平滑转变区域的手征磁化率-温度曲线的峰值随之向低温区移动，这表明小体积有抑制手征对称破缺效应的作用，并使得手征平滑过渡区域的赝临界温度减小。随后，文献[156]将计算推广至有限温有限密情形，发现小体积效应会造成CEP的位置向更低温度和更高化学势

区域转移，且平滑过渡曲线的曲率也相应减小，如图7所示，从左至右5个点分别代表边长为无穷大、3 fm、2.5 fm、2.4 fm和2.3 fm的立方体中CEP模拟结果，图中的曲线是手征转变的平滑过渡曲线，其中：虚线、点虚线和点线分别对应于边长为3 fm、2.5 fm和2 fm的情形，当边长降至2 fm时，相应的平滑过渡曲线延伸入数值计算较困难的低温阴影区域。此外，从图7还可以看出，当系统体积大于(3 fm)^{3}时，体系的热力学量趋于无穷大体积的结果。同时，文献[156]发现当系统体积大于(3 fm)^{3}时，体系的热力学量趋于无穷大体积的结果。此后，文献[157]在DS方程方法框架下，将MIT边界条件和准粒子近似结合起来，使夸克数密度完全约束于球形火球内，发现小体积效应在火球半径为5 fm左右时变得明显，与实际重离子碰撞中的火球体积接近。之后，文献[158]超越彩虹近似，引入耦合的夸克和胶子DS方程，结果与文献[155−156]定性相符，但小体积效应会在(5 fm)^{3}以下时体现出来。最近，文献[159]采用DS方程方法研究发现，虽然CEP附近的重子数涨落依赖体积效应，但其比值则依赖很小，该结果与夸克-介子模型[160]的结果并不一致，有待实验检验。

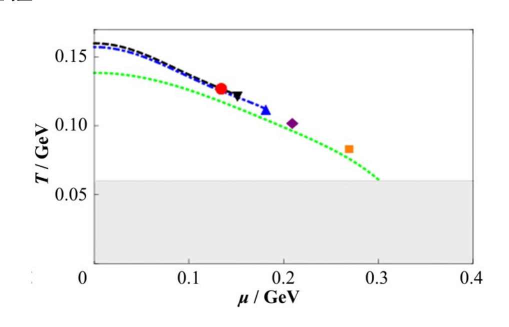


图7　采用彩虹近似的DS方程给出的CEP位置随体积的移动[156]

Fig.7　Shift of the critical endpoint (CEP) location with respect to the volume predicted by the Dyson-Schwinger (DS) equations under the Rainbow truncation[156]

与此同时，人们研究了小体积效应对重离子碰撞中的介子性质的影响。对于重介子，文献[161]将QGP火球近似处理为一个不可穿透的球形腔，采用随温度变化的重夸克相互作用势，求解了有限体积下的薛定谔方程，研究其中重夸克偶素（主要是J/ψ和Υ及其低激发态）束缚能随温度和球体体积的变化。研究发现随着火球体积的减小，重夸克偶素融解温度（定义为束缚能降为零的温度）会随之降低，如图8所示。此外，体积更大的介子对系统体积更加敏感，例如基态介子比激发态介子、J/ψ介子比Υ介子对于火球的小体积效应更加敏感。另一方面，文献[162]采用PNJL模型研究了有限体积效应对轻介子π和σ介子的影响，发现随着系统体积减小，在同样的温度和化学势下，π和σ介子的质量趋近相同，这是小体积下动力学手征破缺效应减弱的又一体现。

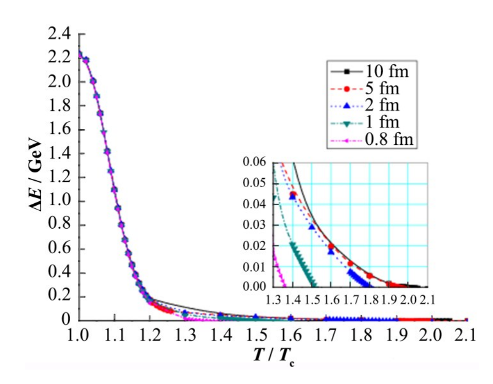


图8　球形腔中J/ψ介子融解温度随腔体半径的变化[161]
纵轴为粲夸克和反粲夸克结合能，其为零时的温度判定为介子融解温度

Fig.8　The relationship between the meson melting temperature in a hot spherical cavity and the cavity radius[161]. The *y*-axis represents the binding energy of charm and anti-charm quarks, whose vanishing meets the criteria for the meson melting temperature.

3.3　旋转效应

考虑到在非对心重离子碰撞产生的QGP的极高涡旋度和一些致密星的极高转速，研究旋转效应对QCD相图的影响具有现实的意义。

目前研究发现，在手征相变中，旋转会压低手征凝聚，促进手征对称性恢复，降低手征相变温度[54,57,71]。这里，我们定性地解释这一效应。旋转参考系是一种非惯性系，其中的物理量将会受到非惯性修正。在角速度为Ω的旋转系中，角动量为J的物体的能量将额外获得一项$-\Omega\cdot J$的修正[54−55,57]（在非相对论和相对论情形下都是如此）。因此，在旋转系中，粒子的角动量将倾向平行于旋转方向排列。手征凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$的角动量为0，粒子角动量沿同一方向排列不利于其形成，因此，旋转会压低手征凝聚，从而促进手征恢复。

在旋转对相变影响的研究中，人们通常考虑刚性的旋转，即系统各处的角速度相同。在此情形下，需要避免超光速的问题。例如，文献[54]考虑了无穷大空间的旋转体系中的手征相变，其结果表明，在零温零化学势时，快速旋转可以引发手征相变。随后，文献[55−57,71]用边界条件将系统限制在光速面以内，发现零温零化学势时旋转对于相变没有任何影响，这一结论称为“冷真空不能旋转”[55]。该结论有着很深刻的原因，涉及旋转真空和非旋转真空的关系[55,57]。文献[163−165]表明，只要把系统限制在光速面内，旋转真空就与非旋转真空相同。也即，

在旋转观者看来，非旋转真空中的反粒子不会变成粒子，粒子也不会变成反粒子（即不会类似安鲁效应[166-167]），这是"冷真空不能旋转"的原因。

下面，以两味NJL模型为例，展示如何在平均场近似下将旋转效应考虑进去[57]。首先，需要求解旋转系的自由Dirac方程，得到本征能量和模式解。旋转系自由Dirac方程为：

$$\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}+\Gamma_{\mu}\right)-M\right]\psi=0 \tag{34}$$

式中：Γ_{μ}是弯曲坐标系中的自旋联络；M为粒子质量。设解的形式为$\psi(x)=u(x)\mathrm{e}^{-i\tilde{E}t}$，可得本征方程：

$$\tilde{H}u(x)=\tilde{E}u(x) \tag{35}$$

$$\tilde{H}=-i\gamma^{\hat{0}}\gamma^{\hat{i}}\partial_{i}+\gamma^{\hat{0}}M-\Omega J_{z}=H-\Omega J_{z} \tag{36}$$

式中：H具有和惯性系自由哈密顿相同的形式；J_z是z方向角动量算符（我们设转轴为z轴）。对本征方程的求解一般变换到柱坐标或球坐标，如在柱坐标下，本征态由一组量子数$j=(E_j,k_j,m_j,\lambda_j)$标记，本征能量：

$$\tilde{E}_{j}=E_{j}-\Omega\left(m_{j}+\frac{1}{2}\right) \tag{37}$$

$$E_{j}=\pm\sqrt{q_{j}^{2}+k_{j}^{2}+M^{2}} \tag{38}$$

式中：q_j是横向动量；k_j是纵向动量。在无穷大空间，它们都是连续取值的。这里E与$\tilde{E}$分别是非旋转真空和旋转真空的本征能量。为了把系统限制在光速面内，需要施加边界条件，这会使得横向动量q_j离散化。如施加谱（spectral）边界条件：

$$\psi_{m}^{1}|_{r=R}=\psi_{m}^{3}|_{r=R}=0,\quad m+\frac{1}{2}>0 \tag{39}$$

$$\psi_{m}^{2}|_{r=R}=\psi_{m}^{4}|_{r=R}=0,\quad m+\frac{1}{2}<0 \tag{40}$$

式中：ψ_m^i表示被m标记的波函数的第i个分量；R为半径且满足$\Omega R<1$。此时，横向动量q被离散化为：

$$q_{ml}R=\begin{cases}\xi_{m,l}, & m+\frac{1}{2}>0\\ \xi_{-m-1,l}, & m+\frac{1}{2}<0\end{cases} \tag{41}$$

式中：$\xi_{m,l}$是贝塞尔函数J_m的第l个非零根。这样q有最小取值，这将使得E与$\tilde{E}$总是同号的，从而旋转真空与非旋转真空相同。

得到了旋转系自由Dirac方程的模式解之后，我们用它来计算手征凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$。这可以通过先计算传播子得到[71]，也可以把场算子用模式解展开直接计算[57]。由于旋转，手征凝聚不再是均匀的，而与空间位置有关。将凝聚表达式代入NJL能隙方程中自洽求解，就可以得到夸克有效质量，它也是一个随位置变化的函数。在自洽求解过程中，人们通常使用局域密度近似，即把r处的凝聚表达式中的有效质量用r处的有效质量代入，这在质量随r变化比较缓慢时是合理的。值得指出，在上面的处理中，有限体积效应已经被自然地考虑在内了。

图9、10给出了有旋转时，有效质量随温度和化学势的变化曲线，可以看到，旋转确实压低了手征凝聚，使得相变温度和化学势降低。在相变点附近，旋转的效应比较显著，而在远离相变点的区间，旋转效应不显著。在$\Omega R<0.1$时，旋转对相变影响很小，因此在研究致密星的物态方程时，可以忽略旋转对相变的影响而只考虑旋转的整体效应[168]。值得指出，正如体积效应研究中所显示的，这里边界条件对结果的影响也可能是非常大的[66]，尤其在体系的体积比较小时。

至于旋转对解禁闭相变影响，使用有效模型和全息方法的研究都表明，旋转有利于解禁闭的发生[61-63,67]，但格点计算的结果与之相反[64-65]，因此，该问题仍有待进一步研究。

QGP和致密星在旋转时往往伴随着强磁场[169-172]，因此，旋转和磁场同时存在时的QCD相变研究也受到关注。磁场下的QCD物态本就是一个比较重要的研究方向（可参考文献[173]）。磁场的一个重要效应是磁催化，即手征凝聚随磁场增强而变大。但人们又发现在某些温度和磁场强度时，会出现手征凝聚随磁场增强而减小的现象，称为反磁催化，其机制目前仍未达成共识[173-174]。在同时考虑旋转和磁场之后，相变行为变得更加复杂。在不同的参数区间里，QCD相变会有不同的特点[71]。人们发现有旋转时，在某些参数区间，也会出现手征凝聚随磁场增大而减小的现象[68,71]。文献[69-70]研究了同时存在旋转和磁场时的π凝聚相变，发现二者的同时存在促进π凝聚的产生。在同时考虑旋转和磁场对相变影响的研究中，同样需要限制系统为有限尺寸。文献[71]中对均匀磁场下旋转系的自由Dirac方程求解表明，在用圆柱形的边界条件把系统限制在光速面以内的情况下，旋转真空与非旋转真空等价。现有的研究都支持旋转不能改变真空，但都是在某种特定形状和种类的边界条件下的特例，而非一般证明。

目前旋转效应的研究绝大多数都假定旋转是刚性的，这样的假定便于数学处理。但真实QCD物态如重离子碰撞产生的火球，其旋转并不是刚性的。非刚性旋转对QCD物态的影响仍是一个值得探索的课题。

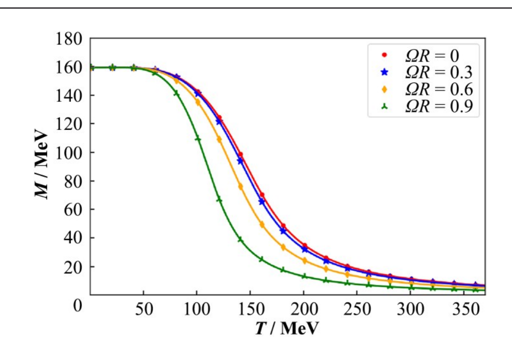


图9 不同角速度下夸克有效质量随温度的变化，半径 R = 1.97 fm，位置 $r = 0.8R$，化学势 $\mu = 0$[57]

Fig.9 The variation of the effective quark mass with temperature at different angular velocities when radius R = 1.97 fm, location $r = 0.8R$, and chemical potential $\mu = 0$[57]

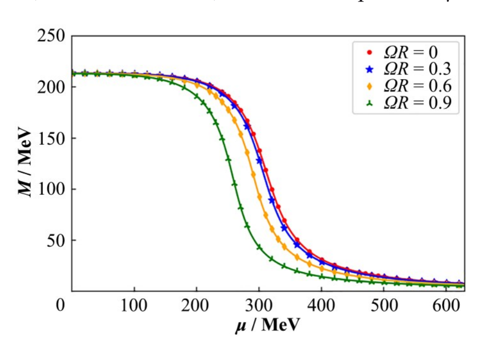


图10 不同角速度下夸克有效质量随化学势的变化，半径 R = 1.97 fm，位置 $r = 0.6R$，温度 T = 50 MeV[57]

Fig.10 The variation of the effective quark mass with chemical potential at different angular velocities when the radius R = 1.97 fm, location $r = 0.8R$, and temperature $\mu = 0$[57]

4 致密星：中子星、混杂星、夸克星

QCD相图的另一个研究热点是低温有限密区域，致密星体的观测信息对理论研究提供了有效约束。1967年，人们首次探测到脉冲星，通过一系列观测，大家对脉冲星有了一个基本的认识：脉冲星是一个具有约一到两个太阳质量、半径在10~20 km的致密天体。人们认为，这类天体是中子星，其中心存在低温有限密强相互作用物质。其中部分中子星具有强磁场、旋转非常快和转速发生突变等现象。

人们通过对脉冲星的观测推断，中子星具有壳层结构。在一层很薄的大气之下，先是外壳层，由原子核和电子组成，原子核之间构成晶格结构，密度小于约 4×10^{11} g·cm^{-3}。再向里，是内壳层，由自由中子、电子和丰中子原子核组成，密度约在 4×10^{11} g·cm^{-3} 至 $0.5\rho_0$ 之间，其中 ρ_0 为核物质饱和密度。在最中心的核区，为本文重点讨论的低温有限密强相互作用物质，密度大于 $0.5\rho_0$。核区部分所占比例较大，对中子星整体性质影响较大。尤其是对于密度大于 ρ_0 的低温有限密强相互作用物质区域，由于缺乏地面实验，人们对其性质尚无定论，一部分学者猜测核区可能存在超子及夸克[84]。

脉冲星在射电波段、可见光波段、X射线和 γ 射线波段均有观测。现有的一些天文观测能够测量中子星的质量和大致的半径，其中有一些观测结果表明存在大于两个太阳质量的脉冲星[86-87]，可对低温有限密强相互作用物质的物态方程进行有效的限制。500 m口径球面射电望远镜(Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope，FAST)和平方公里阵列射电望远镜(Square Kilometre Array，SKA)对毫秒脉冲星和双星系统敏感，在灵敏度上有数量级的提高[88-89]。X射线卫星项目，例如中子星内部成分探测器(Neutron star Interior Composition Explorer，NICER)[90]、大型X射线计时观测台(Large Observatory for X-ray Timing，LOFT)[91]和硬X射线调制望远镜(慧眼)可以把脉冲星的半径测量提高到一个前所未有的精度。从2019年12月以来，NICER陆续公开一些质量半径数据[92-97]，已经有研究用NICER的数据限制物态方程[92,97]。此外，引力波探测的出现给中子星的研究带来了新的方向，能更好地限制中子星的物态方程及结构。2017年8月17日，激光干涉引力波天文台(Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory，LIGO)探测到双中子星绕转的引力波信号[82,98]，并且伴随着其他电磁信号。引力波GW170817带来了关于中子星的信息，如双星的质量比和约化质量，同时还有关于中子星潮汐撕裂时的形变参数等信息[82,98]。这次观测更好地限制了物态的声速、中子皮厚度及核物质对称能，未排除夸克物质存在的可能性。另外还有一些小质量中子星相关的观测，指向奇异夸克星存在的可能性。

由于格点理论的“符号问题”，人们目前无法针对上述问题(如中子星构型、物态方程、质量-半径关系等)进行第一性原理计算，因此需要借助非微扰QCD有效模型进行研究。

理论上，在两味和三味NJL模型框架下我们可以计算零温有限化学势下的强相互作用物质物态方程，即能量密度-压强(ϵ - P)关系：

$$\epsilon = -P + \sum_i \mu_i \rho_i \tag{42}$$

其中：压强-化学势(P - μ)关系和粒子数密度-化学势(ρ - μ)关系可通过如下：

$$P(\mu) = P(\mu = 0) + \int_0^{\mu} \mathrm{d}\mu' \rho(\mu') \tag{43}$$

$$\rho_i(\mu) = \langle \psi^+ \psi \rangle_i = -N_c \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{tr}\left[iS_i \gamma_0 \right] \tag{44}$$

这里 $P(\mu = 0)$ 是一个模型依赖的唯象参数，表示真

空压强，与MIT口袋模型的真空口袋常数 $-B$ 等价；"tr"符号是对Dirac空间求迹。通常 $B^{1/4}$ 的取值范围为100~200 MeV。

考虑到中子星中的β平衡和电中性条件，

$$\mu_d = \mu_u + \mu_e$$
$$\mu_s = \mu_u + \mu_e$$
$$\frac{2}{3}\rho_u = \frac{1}{3}\rho_d + \frac{1}{3}\rho_s + \rho_e \tag{45}$$

物态方程(42)可简化为单变量函数，通常人们选择重子化学势 $\mu_B = \mu_u + \mu_d + \mu_s$ 作为自由变量。这里所讨论的强相互作用物质及其相变对应于QCD相图的低温有限密区域。通过求解Tolman-Oppenheimer-Volkov（TOV）方程与引力场度规方程，人们可以得到中子星的质量-半径关系与潮汐形变参数，并与上述天文观测结果进行比较。

近年来，除了传统的纯中子星构型，一些针对奇异混杂星（即星体核心中的内核部分包含解禁闭的夸克胶子等离子体，内核以外仍由中子物质构成的中子星）和夸克星（由解禁闭的夸克胶子等离子体构成）的研究取得了重要进展。我们接下来主要针对这两种中子星构型展开讨论。

4.1 奇异混杂星

一般人们采用零温下的核物质物态方程描述内核以外的中子星物质，常用的核物质模型包括相对论平均场模型[175]（如NL3、NL3ωρ模型）、APR模型[176]、Sly模型[177]等。奇异夸克物质的物态方程目前缺乏基于QCD拉氏量的第一性原理计算。因此，人们通常借助有效场论模型，如DSE、NJL模型和准粒子模型等研究中子星内的夸克物质物态方程。

为了得到奇异混杂星内的强相互作用物质物态方程，人们需要根据不同的相变类型采用相应的衔接方式将核物质与夸克物质的物态方程连接起来。常用的混杂物态方程构型有Maxwell构型、Gibbs构型以及三窗口衔接构型[178]，其中，Maxwell构型和Gibbs构型与一级相变相对应，而三窗口衔接构型与平滑过渡相对应。

图11展示的三条斜率较大的曲线即为三味NJL模型在固有时正规化下的 P - μ 关系，分别对应于口袋常数 $B^{1/4}$ 取167 MeV、170 MeV、171 MeV的情况；黑色曲线是相对论平均场模型NL3ωρ给出的 P - μ 关系[179]。可以看出，口袋常数 $B^{1/4}$~(167，171) MeV时，三味NJL模型计算得到的夸克物态方程彼此差别不大，而与核物态方程差别较大，其交点 μ_B 约1.3 GeV。对于图11中的夸克物质物态方程和核物质物态方程进行三窗口衔接即可得到混杂物态方程，其衔接函数为：

$$P(\mu) = P_H(\mu) f_-(\mu) + P_Q(\mu) f_+(\mu)$$
$$f_\pm(\mu) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \tanh\left(\frac{\mu - \bar{\mu}}{\Gamma}\right)\right) \tag{46}$$

式中：$\bar{\mu}$ 代表衔接窗口中心化学势；窗口 $\bar{\mu} - \Gamma \lesssim \mu \lesssim \bar{\mu} + \Gamma$ 对应平滑过渡区域，进而得到的奇异混杂星质量-半径关系与并合双星潮汐形变参数分别如图12和图13所示。

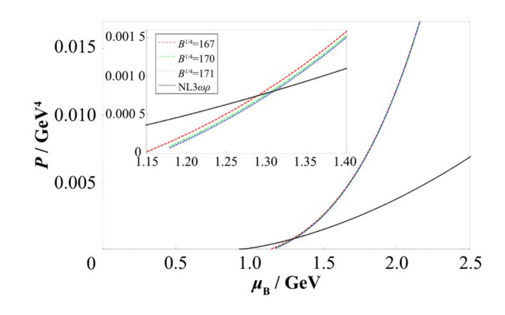


图11 奇异夸克物态方程与强子物态方程[179]
Fig.11 The equation of states of strange quark matter and hadronic matter[179]

图12中的9条曲线来自不同 $B^{1/4}$、$\bar{\mu}$、Γ 参数下的9组代表性物态方程对应的质量-半径关系。其中，最大的混杂星质量可达2.19 $M_\odot$，相应的半径为12.01 km。通过对($B^{1/4}$，$\bar{\mu}$，Γ)构成的参数空间进行扫描计算并结合中子星质量与潮汐形变参数的天文观测约束，可以将口袋常数 $B^{1/4}$ 限制在166.16~171.06 MeV。而混杂星核心的重子化学势的计算结果表明，满足天文观测约束的混杂星内核并非纯夸克核，而是强子-夸克混杂物质相。

图13左下方的短弯曲线是上述9组混杂物态方程所得的GW170817事件中的并合双星的潮汐形变参数 $\Lambda_1 - \Lambda_2$ 关系曲线，右上方长弯曲线代表核物质物态方程NL3ωρ对应的纯中子星潮汐形变参数 $\Lambda_1 - \Lambda_2$ 关系。两者所夹的两条曲线分别与坐标轴包围的左下方区域对应于不同模型预测的双星并合事件GW170817中低自旋旋进情况下的90%后验概率区域。其中右上侧曲线是较早公布的测量结果[98]，左下侧曲线是最近根据波模型SEOBNRT更新后的测量结果[99]。我们发现，尽管纯中子星构型下的核物质物态方程NL3ωρ不满足潮汐形变参数的天文观测约束，但是其所构成的混杂物态方程仍满足天文观测约束。也就是说，核物态方程NL3ωρ仍然可以很好地描述混杂星中的强子相。

4.2 夸克星

夸克星是一类主要由解禁闭的夸克胶子等离子体构成的脉冲星模型。此前，Witten等[180−183]认为强相互作用物质的基态需要包含奇异夸克物质，即三

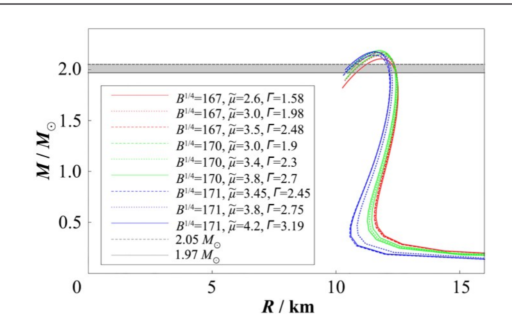


图12　混杂星质量-半径关系[179]
阴影区域代表来自PSR J0348+0432的中子星质量约束
Fig.12　Mass-radius relations of hybrid stars[179]. The shaded region represents the mass constraint on neutron stars from PSR J0348+0432.

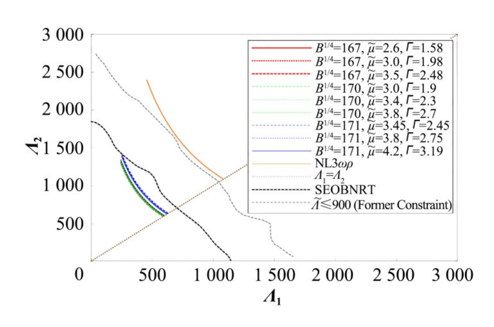


图13　奇异混杂星和纯中子星潮汐形变参数$\Lambda_1-\Lambda_2$关系[179]
长直点线表示$\Lambda_1=\Lambda_2$的边界
Fig.13　Tidal deformability $\Lambda_1-\Lambda_2$ of hybrid stars and the pure neutron star[179]. The long straight dotted line indicates the boundary of $\Lambda_1=\Lambda_2$, along which the above stars are not deformable.

味夸克物质比两味夸克物质更稳定。之后一系列关于奇异(混杂)夸克星特性的研究得以展开[184–190]。然而2018年的一项研究[191]指出，对于重子数大于300的超大核物质，非奇异夸克物质可能更稳定。我们知道中子星和夸克星就是一类具有超大重子数的致密星体。因此理论上并不能排除非奇异夸克星存在的可能。两味和三味夸克物质哪种更稳定目前还是一个开放性问题，我们需要计算两味和三味夸克物质的平均单重子能量，来给出相关的答案。

近年来在NJL模型框架下应用自洽平均场近似方法[192–193]，针对奇异夸克星与非奇异夸克星的研究[194–196]指出，无论是采用三维动量正规化还是固有时正规化都能得到符合天文观测约束的结果，即最大星体质量大于$2\,M_\odot$[86–87]，半径符合NICER约束[93–94,197]，潮汐形变参数$\Lambda(1.4\,M_\odot)\leqslant 800$[98]。

最近一项研究[198]表明，在上述的自洽平均场近似的NJL模型下，非奇异夸克星和奇异夸克星都可能稳定存在，其结果依赖于拉氏量中的矢量相互作用道和交换相互作用道的比重以及与夸克色禁闭相关的真空压强，如图14所示。对于相同的R_v，α较大且B较小时(右下阴影区域)，非奇异夸克物质更稳定；反之，α较小且B较大时(左上阴影区域)，奇异夸克物质更稳定。此外，非奇异夸克星对应的物态方程比奇异夸克星的更硬，其所允许的最大脉冲星质量(~$2.7\,M_\odot$)要比奇异夸克星的(~$2.1\,M_\odot$)更大，如图15所示。

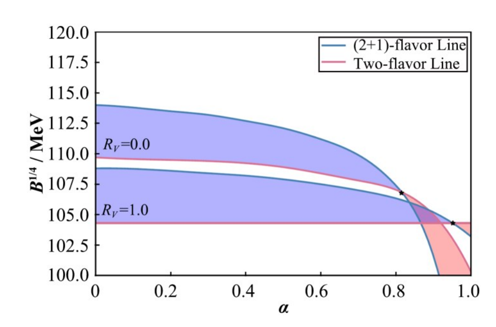
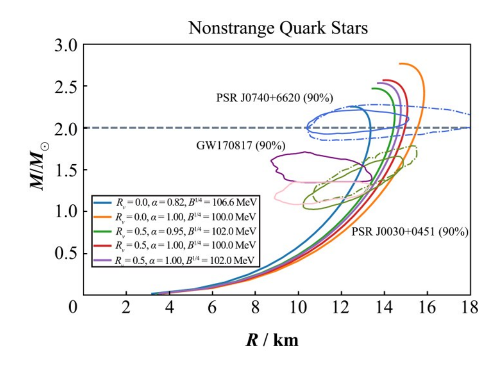


图14　两味与三味夸克物质的稳定窗口[198]
其中：$R_v=G_v/G$，代表矢量相互作用耦合常数G_v与标量相互作用耦合常数G的比值，α为交换相互作用道所占的比重，B为口袋常数
Fig.14　Stability windows of two-flavor and three-flavor quark matter[198]. $R_v=G_v/G$ represents the ratio of coupling constants of vector interaction and scalar interaction, α is the weighting factor of the exchange interaction channel, and B is the bag constant.



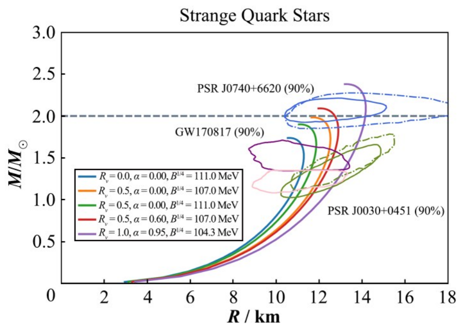


图15　夸克星的质量半径关系[198]
其中：右上和右下的两组闭合圈来自PSR J0740+6620和PSR J0030+0451的中子星质量-半径观测约束，其左侧两个闭合圈来自GW170817双星并合潮汐形变参数观测约束
Fig.15　Mass-radius relations for quark stars[198]. The available mass-radius constraints of neutron stars from PSR J0740+6620 and PSR J0030+0451 (upper right loops and lower right loops), and the binary tidal deformability constraint from LIGO/Virgo GW170817 (left loops) are displayed.

通过以上研究，我们可以对模型的参数空间进行限制，进而得到符合限制的零温下的QCD相变类型和相变点。例如，对于非奇异夸克星，在自洽平均场近似的NJL模型下，采用三维动量正规化所得的夸克物态方程，α值越大或口袋常数越小，其物态方程越硬，对应的夸克星最大质量也越大，结果如表1所示[196]。而零温下不同α值对应的有效夸克质量随化学势依赖关系如图16所示[196]，当α由零增大至0.85，其相变过程将由一级相变转变为平滑过渡，赝临界化学势μ_{pc}约320 MeV（与一级相变中所谓的"临界点"不同，这里的"赝临界点"对应于平滑过渡，指的是夸克凝聚或有效夸克质量曲线的拐点）。因此，当口袋常数$B \geqslant (100\ \mathrm{MeV})^4$时，对于脉冲星的纯夸克星构型，符合天文观测约束的QCD相变类型倾向于平滑过渡。

表1 不同参数下的夸克星最大质量与1.6倍、1.4倍太阳质量的夸克星半径的计算结果[196]

Table 1 The maximum masses of quark stars with different parameter sets, and the radius of quark stars with 1.6 and 1.4 $M_\odot$[196]

α	B / MeV^4	M_{max}	$R_{1.6}$ / km	$R_{1.4}$ / km
0.9	100^4	2.01 M_{sol}	10.5	10.2
0.9	90^4	2.05 M_{sol}	10.9	10.8
0.9	80^4	2.11 M_{sol}	11.5	11.3
0.8	80^4	2.00 M_{sol}	10.9	10.7

此外，文献[195]在两味自洽平均场近似的NJL模型框架下，采用固有时正规化研究了零温有限化学势下的QCD物态方程与纯夸克星结构。相关计算结果表明符合天文观测约束的QCD相变过程亦为平滑过渡，且赝临界化学势μ_{pc}约330 MeV。

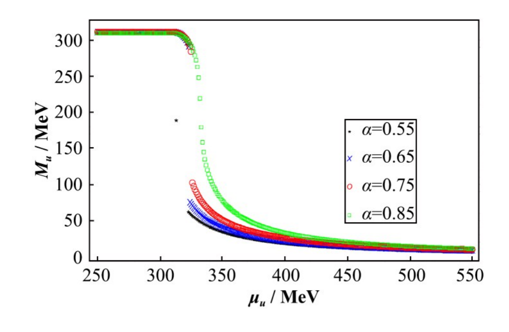


图16 零温下，自洽平均场近似的三维动量截断正规化NJL模型对应的夸克有效质量-化学势关系[196]

Fig.16 At absolute zero, the relationship between the effective quark mass and chemical potential from the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model with the self-consistent mean field approximation method and three-momentum cutoff regularization[196]

5 结语

本文回顾了近期QCD相图研究的多方面进展，涵盖了利用高阶磁化率寻找相变信号、QCD相图的手征不平衡效应、有限体积效应和旋转效应以及QCD物态方程在致密星体中的应用等。

在利用重子数高阶涨落确定相变信号、寻找临界点方面，近年来有效场论的计算和STAR开展的束能量扫描实验都取得了很大的进展。关于净质子数高阶涨落之比对碰撞能量的依赖关系，理论在合理近似下的计算结果和实验可以定性符合。然而目前对于临界点是否存在的问题，理论和实验还没有最终的定论。未来需要积累更多的实验数据[175]，并在理论上提出更加敏感的临界点信号，包括更高阶的涨落等，加以深入而细致地研究。

关于有限手征化学势μ_5对CEP位置的影响，在DSE框架下，通过对三种有效相互作用模型的研究表明，在T - μ_5平面上，都不存在CEP，即不存在CEP_5。在模型参数发生10%变化时，结论不会发生定性改变。对于NJL模型的计算，不同的截断方式会得出不同的结论。通过对夸克能隙方程中所采用的截断方案进行分析，发现硬截断和软截断关于CEP_5存在性的结果定性不同，其原因在于夸克凝聚的温度依赖项在采用软截断方案时包含更多的大动量夸克模式贡献，导致CEP_5不存在。在PNJL模型的计算中，出现了类似的情况，CEP_5的存在性与截断参数有关。当PNJL模型采用较小的截断时，包含更少的大动量夸克模式的贡献，结果与格点QCD、DSE的结果一致。

对于体积效应，有效模型的研究一致表明小体积效应对重离子碰撞有一定影响，主要体现在手征赝临界温度、CEP位置的变化以及介子融解温度的降低。另一方面，DSE研究表明重子数涨落的比值对于体积效应可能不敏感，这使得重离子碰撞实验数据和热力学极限下的计算结果可以直接进行对比。

对于旋转效应，NJL模型研究表明旋转会压低手征凝聚，使得相变温度和化学势降低。旋转效应在相变点附近比较显著，在远离相变点的区间不显著。定量的研究结果表明，对于致密星物态的研究，可以忽略旋转对相变的影响而只考虑其整体效应。在QCD相变旋转效应的研究中，为了避免出现超光速，同时考虑有限尺寸效应是非常重要的。在解禁闭相变方面，旋转的影响尚未有定论，而在同时存在旋转和磁场的情况下，相变行为会变得非常复杂，这些都有待进一步的研究。此外，非刚性旋转的效应也是未来值得探索的课题。

对于致密星的研究，目前对于零温有限化学势下的QCD物态方程和含有夸克物态的中子星结构，

人们需要诉诸有效场论模型研究。结合现有天文观测可以限制模型的参数空间，从而对零温下的QCD相变的类型和相变点给出限制。在NJL模型框架下，符合天文观测约束的纯夸克星物态方程对应的QCD相变为平滑过渡，其赝临界化学势μ_{pc}介于300~350 MeV，且（非奇异/奇异）夸克星最大质量可达2.7 $M_{\odot}$/2.1 $M_{\odot}$；而三窗口衔接构型的奇异混杂星最大质量可达2.19 $M_{\odot}$，口袋常数$B^{1/4}$被约束在166.16~171.06 MeV，核心为强子-夸克混杂相。除了上文提及的致密星质量半径观测和引力波观测，其他天文观测活动也有助于判断致密星的本质，比如与致密星相关的爆发活动观测。文献[200]认为，奇异夸克星可能会产生具有周期性的快速射电暴等特殊现象。期待未来日益丰富的天文观测能给中子星结构和QCD相变研究带来更多的线索。另外基于第一性原理的场论计算进展也将有助于我们更好地理解强相互作用物质及其相变。

致谢 宗红石教授指导完成了本文介绍的诸多研究论文，在此缅怀感谢。

作者贡献声明 所有作者均参与文章撰写，贡献相等。

参考文献

1 Shuryak E. What RHIC experiments and theory tell us about properties of quark-gluon plasma? [J]. Nuclear Physics A, 2005, **750**(1): 64 – 83. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2004.10.022.

2 Niida T, Miake Y. Signatures of QGP at RHIC and the LHC[J]. AAPPS Bulletin, 2021, **31**(1): 12. DOI: 10.1007/s43673-021-00014-3.

3 Bazavov A, Brambilla N, Ding H T, *et al*. Polyakov loop in 2+1 flavor QCD from low to high temperatures[J]. Physical Review D, 2016, **93**(11): 114502. DOI: 10.1103/physrevd.93.114502.

4 Brodsky S J, Roberts C D, Shrock R, *et al*. Confinement contains condensates[J]. Physical Review C, 2012, **85**(6): 065202. DOI: 10.1103/physrevc.85.065202.

5 Masayuki A, Koichi Y. Chiral restoration at finite density and temperature[J]. Nuclear Physics A, 1989, **504**(4): 668 – 684. DOI: 10.1016/0375-9474(89)90002-x.

6 Ackermann K H, Adams N, Adler C, *et al*. Elliptic flow in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=130 GeV[J]. Physical Review Letters, 2001, **86**(3): 402 – 407. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.402.

7 Aamodt K, Abelev B, Quintana A A, *et al*. Elliptic flow of charged particles in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}}$= 2.76 TeV [J]. Physical Review Letters, 2010, **105**(25): 252302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.252302.

8 Aamodt K, Abelev B, Quintana A A, *et al*. Higher harmonic anisotropic flow measurements of charged particles in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=2.76 TeV[J]. Physical Review Letters, 2011, **107**(3): 032301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.032301.

9 Eskola K J. Nearly perfect quark-gluon fluid[J]. Nature Physics, 2019, **15**(11): 1111 – 1112. DOI: 10.1038/s41567-019-0643-0.

10 Rebhan A, Steineder D. Violation of the holographic viscosity bound in a strongly coupled anisotropic plasma [J]. Physical Review Letters, 2012, **108**(2): 021601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.021601.

11 Skokov V V, Illarionov A Y, Toneev V D. Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions[J]. International Journal of Modern Physics A, 2009, **24**(31): 5925 – 5932. DOI: 10.1142/s0217751x09047570.

12 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Global Λ hyperon polarization in nuclear collisions[J]. Nature, 2017, **548**(7665): 62 – 65. DOI: 10.1038/nature23004.

13 Aoki Y, Fodor Z, Katz S D, *et al*. The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit[J]. Physics Letters B, 2006, **643**(1): 46 – 54. DOI: 10.1016/j.physletb.2006.10.021.

14 Aoki Y, Borsányi S, Dürr S, *et al*. The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II[J]. Journal of High Energy Physics, 2009, **2009**(6): 88. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/06/088.

15 Bhattacharya T, Buchoff M I, Christ N H, *et al*. QCD phase transition with chiral quarks and physical quark masses[J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(8): 082001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.082001.

16 He M, Li J F, Sun W M, *et al*. Quark number susceptibility around the critical end point[J]. Physical Review D, 2008, **79**: 036001. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.036001.

17 Fischer C S, Luecker J, Mueller J A. Chiral and deconfinement phase transitions of two-flavour QCD at finite temperature and chemical potential[J]. Physics Letters B, 2011, **702**(5): 438 – 441. DOI: 10.1016/j.physletb.2011.07.039.

18 Shi C, Wang Y L, Jiang Y, *et al*. Locate QCD critical end point in a continuum model study[J]. Journal of High

Energy Physics, 2014, **2014**(7): 14. DOI: 10.1007/JHEP07(2014)014.

19 Gao F, Liu Y X. QCD phase transitions via a refined truncation of Dyson-Schwinger equations[J]. Physical Review D, 2016, **94**(7): 076009. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.076009.

20 Du Y L, Cui Z F, Xia Y H, *et al*. Discussions on the crossover property within the Nambu-Jona-Lasinio model [J]. Physical Review D, 2013, **88**(11): 114019. DOI: 10.1103/physrevd.88.114019.

21 Du Y L, Lu Y, Xu S S, *et al*. Susceptibilities and critical exponents within the Nambu-Jona-Lasinio model[J]. International Journal of Modern Physics A, 2015, **30**(34): 1550199. DOI: 10.1142/s0217751x15501997.

22 Costa P, Ruivo M C, de Sousa C A. Thermodynamics and critical behavior in the Nambu-Jona-Lasinio model of QCD[J]. Physical Review D, 2008, **77**(9): 096001. DOI: 10.1103/physrevd.77.096001.

23 Fukushima K. Phase diagrams in the three-flavor Nambu-Jona-Lasinio model with the Polyakov loop[J]. Physical Review D, 2008, **77**(11): 114028. DOI: 10.1103/physrevd.77.114028.

24 Fu W J, Zhang Z, Liu Y X. 2+1 flavor Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model at finite temperature and nonzero chemical potential[J]. Physical Review D, 2008, **77**: 014006. DOI: 10.1103/physrevd.77.014006.

25 Costa P, de Sousa C A, Ruivo M C, *et al*. The QCD critical end point in the PNJL model[J]. EPL (Europhysics Letters), 2009, **86**(3): 31001. DOI: 10.1209/0295-5075/86/31001.

26 Fu W J, Pawlowski J M, Rennecke F. QCD phase structure at finite temperature and density[J]. Physical Review D, 2020, **101**(5): 054032. DOI: 10.1103/physrevd.101.054032.

27 Adhikari P, Andersen J O. QCD at finite isospin density: Chiral perturbation theory confronts lattice data[J]. Physics Letters B, 2020, **804**: 135352. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135352.

28 Adhikari P, Andersen J O, Kneschke P. Two-flavor chiral perturbation theory at nonzero isospin: pion condensation at zero temperature[J]. The European Physical Journal C, 2019, **79**(10): 874. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-7381-4.

29 Schaefer B J, Pawlowski J M, Wambach J. Phase structure of the Polyakov-quark-meson model[J]. Physical Review D, 2007, **76**(7): 074023. DOI: 10.1103/physrevd.76.074023.

30 Nickel D. Inhomogeneous phases in the Nambu-Jona-Lasinio and quark-meson model[J]. Physical Review D, 2009, **80**(7): 074025. DOI: 10.1103/physrevd.80.074025.

31 Skokov V, Friman B, Redlich K. Quark number fluctuations in the Polyakov loop-extended quark-meson model at finite baryon density[J]. Physical Review C, 2011, **83**(5): 054904. DOI: 10.1103/physrevc.83.054904.

32 Luo X F, Xu N. Search for the QCD critical point with fluctuations of conserved quantities in relativistic heavy-ion collisions at RHIC: an overview[J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(8): 112. DOI: 10.1007/s41365-017-0257-0.

33 Luo X F. Energy dependence of moments of net-proton and net-charge multiplicity distributions at STAR[C]. PoS (CPOD2014)019. DOI: 10.48550/arXiv.1503.02558.

34 Luo X F, Wang Q, Xu N, *et al*. Properties of QCD matter at high baryon density[M]. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022. DOI: 10.1007/978-981-19-4441-3.

35 Belavin A A, Polyakov A M, Schwartz A S, *et al*. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations[J]. Physics Letters B, 1975, **59**: 85. DOI: 10.1016/0370-2693(75)90163-X.

36 Adler S L. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics [J]. Physical Review, 1969, **177**(5): 2426 – 2438. DOI: 10.1103/physrev.177.2426.

37 Bell J S, Jackiw R. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ-model [J]. Nuovo Cimento A, 1969, **60**(1): 47 – 61. DOI: 10.1007/BF02823296.

38 Christ N H. Conservation-law violation at high energy by anomalies[J]. Physical Review D, 1980, **21**(6): 1591 – 1602. DOI: 10.1103/physrevd.21.1591.

39 Smilga A V. Anomaly mechanism at finite temperature[J]. Physical Review D, Particles and Fields, 1992, **45**(4): 1378 – 1394. DOI: 10.1103/physrevd.45.1378.

40 Yang L K, Luo X F, Segovia J, *et al*. A brief review of chiral chemical potential and its physical effects[J]. Symmetry, 2020, **12**(12): 2095. DOI: 10.3390/sym12122095.

41 Ruggieri M, Peng G X, Chernodub M. Chiral relaxation time at the crossover of quantum chromodynamics[J]. Physical Review D, 2016, **94**(5): 054011. DOI: 10.1103/physrevd.94.054011.

42 Ruggieri M, Peng G X. Quark matter in a parallel electric and magnetic field background: Chiral phase transition and equilibration of chiral density[J]. Physical Review D,

2016, **93**(9): 094021. DOI: 10.1103/physrevd.93.094021.

43 Ruggieri M, Chernodub M N, Lu Z Y. Topological susceptibility, divergent chiral density, and phase diagram of chirally imbalanced QCD medium at finite temperature [J]. Physical Review D, 2020, **102**: 014031. DOI: 10.1103/physrevd.102.014031.

44 Bass S A, Belkacem M, Bleicher M, *et al*. Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 1998, **41**: 255 – 369. DOI: 10.1016/s0146-6410(98)00058-1.

45 Palhares L F, Fraga E S, Kodama T. Chiral transition in a finite system and possible use of finite-size scaling in relativistic heavy ion collisions[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2011, **38**(8): 085101. DOI: 10.1088/0954-3899/38/8/085101.

46 Braun J, Klein B, Schaefer B J. On the phase structure of QCD in a finite volume[J]. Physics Letters B, 2012, **713** (3): 216 – 223. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.05.053.

47 Skokov V, Friman B, Redlich K. Volume fluctuations and higher-order cumulants of the net baryon number[J]. Physical Review C, 2013, **88**(3): 034911. DOI: 10.1103/physrevc.88.034911.

48 Bhattacharyya A, Deb P, Ghosh S K, *et al*. Thermodynamic properties of strongly interacting matter in a finite volume using the Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model[J]. Physical Review D, 2013, **87**(5): 054009. DOI: 10.1103/physrevd.87.054009.

49 Bhattacharyya A, Ray R, Sur S. Fluctuation of strongly interacting matter in the Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model in a finite volume[J]. Physical Review D, 2015, **91** (5): 051501. DOI: 10.1103/physrevd.91.051501.

50 Klein B. Modeling finite-volume effects and chiral symmetry breaking in two-flavor QCD thermodynamics [J]. Physics Reports, 2017, **1**: 707 – 708. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.09.002.

51 Tripolt R A, Braun J, Klein B, *et al*. Effect of fluctuations on the QCD critical point in a finite volume[J]. Physical Review D, 2014, **90**(5): 054012. DOI: 10.1103/physrevd.90.054012.

52 Juričić A, Schaefer B J. Chiral thermodynamics in a finite box[J]. Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement, 2017, **10**(3): 609. DOI: 10.5506/aphyspolbsupp.10.609.

53 Watts A L, Andersson N, Chakrabarty D, *et al*. Colloquium: Measuring the neutron star equation of state using X-ray timing[J]. Reviews of Modern Physics, 2016, **88**(2): 021001. DOI: 10.1103/revmodphys.88.021001.

54 Jiang Y, Liao J F. Pairing phase transitions of matter under rotation[J]. Physical Review Letters, 2016, **117**(19): 192302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.192302.

55 Chernodub M N, Gongyo S. Interacting fermions in rotation: chiral symmetry restoration, moment of inertia and thermodynamics[J]. Journal of High Energy Physics, 2017, **2017**(1): 136. DOI: 10.1007/JHEP01(2017)136.

56 Ebihara S, Fukushima K, Mameda K. Boundary effects and gapped dispersion in rotating Fermionic matter[J]. Physics Letters B, 2017, **764**: 94 – 99. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.11.010.

57 Zhang Z, Shi C, He X T, *et al*. Chiral phase transition inside a rotating cylinder within the Nambu-Jona-Lasinio model[J]. Physical Review D, 2020, **102**(11): 114023. DOI: 10.1103/physrevd.102.114023.

58 Wang L X, Jiang Y, He L Y, *et al*. Chiral vortices and pseudoscalar condensation due to rotation[J]. Physical Review D, 2019, **100**(11): 114009. DOI: 10.1103/physrevd.100.114009.

59 Sun F, Huang A P. Properties of strange quark matter under strong rotation[J]. Physical Review D, 2022, **106** (7): 076007. DOI: 10.1103/physrevd.106.076007.

60 Nishimura K, Yamamoto N. Topological term, QCD anomaly, and the η' chiral soliton lattice in rotating baryonic matter[J]. Journal of High Energy Physics, 2020, **2020**(7): 196. DOI: 10.1007/JHEP07(2020)196.

61 Fujimoto Y, Fukushima K, Hidaka Y. Deconfining phase boundary of rapidly rotating hot and dense matter and analysis of moment of inertia[J]. Physics Letters B, 2021, **816**: 136184. DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136184.

62 Chernodub M N. Inhomogeneous confining-deconfining phases in rotating plasmas[J]. Physical Review D, 2021, **103**(5): 054027. DOI: 10.1103/physrevd.103.054027.

63 Chen X, Zhang L, Li D N, *et al*. Gluodynamics and deconfinement phase transition under rotation from holography[J]. Journal of High Energy Physics, 2021, **2021**(7): 132. DOI: 10.1007/JHEP07(2021)132.

64 Braguta V V, Kotov A Y, Kuznedelev D D, *et al*. Study of the confinement/deconfinement phase transition in rotating lattice SU(3) gluodynamics[J]. JETP Letters, 2020, **112**(1): 6 – 12. DOI: 10.1134/S0021364020130044.

65 Braguta V V, Kotov A Y, Kuznedelev D D, *et al*. Influence of relativistic rotation on the confinement-deconfinement transition in gluodynamics[J]. Physical Review D, 2021, **103**(9): 094515. DOI: 10.1103/physrevd.103.094515.

66 Chernodub M N, Gongyo S. Effects of rotation and

boundaries on chiral symmetry breaking of relativistic fermions[J]. Physical Review D, 2017, **95**(9): 096006. DOI: 10.1103/physrevd.95.096006.

67 Braga N R F, Faulhaber L F, Junqueira O C. Confinement-deconfinement temperature for a rotating quark-gluon plasma[J]. Physical Review D, 2022, **105**(10): 106003. DOI: 10.1103/physrevd.105.106003.

68 Chen H L, Fukushima K, Huang X G, *et al*. Analogy between rotation and density for Dirac fermions in a magnetic field[J]. Physical Review D, 2016, **93**(10): 104052. DOI: 10.1103/physrevd.93.104052.

69 Liu Y Z, Zahed I. Pion condensation by rotation in a magnetic field[J]. Physical Review Letters, 2018, **120**(3): 032001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.032001.

70 Cao G Q, He L Y. Rotation induced charged pion condensation in a strong magnetic field: a Nambu-Jona-Lasino model study[J]. Physical Review D, 2019, **100**(9): 094015. DOI: 10.1103/physrevd.100.094015.

71 Sadooghi N, Tabatabaee Mehr S M A, Taghinavaz F. Inverse magnetorotational catalysis and the phase diagram of a rotating hot and magnetized quark matter[J]. Physical Review D, 2021, **104**(11): 116022. DOI: 10.1103/physrevd.104.116022.

72 Cao G Q. Charged rho superconductor in the presence of magnetic field and rotation[J]. The European Physical Journal C, 2021, **81**(2): 148. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-08900-8.

73 Son D T, Surówka P. Hydrodynamics with triangle anomalies[J]. Physical Review Letters, 2009, **103**(19): 191601. DOI: 10.1103/physrevlett.103.191601.

74 Kharzeev D E, Son D T. Testing the chiral magnetic and chiral vortical effects in heavy ion collisions[J]. Physical Review Letters, 2011, **106**(6): 062301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.062301.

75 Landsteiner K, Megías E, Melgar L, *et al*. Holographic gravitational anomaly and chiral vortical effect[J]. Journal of High Energy Physics, 2011, **2011**(9): 121. DOI: 10.1007/JHEP09(2011)121.

76 Landsteiner K, Megías E, Peña-Benítez F. Frequency dependence of the chiral vortical effect[J]. Physical Review D, 2014, **90**(6): 065026. DOI: 10.1103/physrevd.90.065026.

77 Kharzeev D E, Liao J, Voloshin S A, *et al*. Chiral magnetic and vortical effects in high-energy nuclear collisions—a status report[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2016, **88**: 1 – 28. DOI: 10.1016/j.ppnp.2016.01.001.

78 Abramchuk R, Khaidukov Z V, Zubkov M A. Anatomy of the chiral vortical effect[J]. Physical Review D, 2018, **98**(7): 076013. DOI: 10.1103/physrevd.98.076013.

79 Zubkov M A. Hall effect in the presence of rotation[J]. EPL (Europhysics Letters), 2018, **121**(4): 47001. DOI: 10.1209/0295-5075/121/47001.

80 Flachi A, Fukushima K. Chiral vortical effect with finite rotation, temperature, and curvature[J]. Physical Review D, 2018, **98**(9): 096011. DOI: 10.1103/physrevd. 98.096011.

81 Lin S, Yang L X. Magneto-vortical effect in strong magnetic field[J]. Journal of High Energy Physics, 2021, **2021**(6): 54. DOI: 10.1007/JHEP06(2021)054.

82 Buballa M. NJL-model analysis of dense quark matter[J]. Physics Reports, 2005, **407**(4 – 6): 205 – 376. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.11.004.

83 Oertel M, Hempel M, Klähn T, *et al*. Equations of state for supernovae and compact stars[J]. Reviews of Modern Physics, 2017, **89**(1): 015007. DOI: 10.1103/revmodphys.89.015007.

84 Haensel P, Potekhin A Y, Yakovlev D G. Neutron stars [M]. New York: Springer, 2007.

85 李昂, 胡金牛, 鲍世绍, 等. 致密物质状态方程: 中子星与奇异星[J]. 原子核物理评论, 2019, **36**(1): 1 – 36. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.36.01.001.

LI Ang, HU Jinniu, BAO Shishao, *et al*. Dense matter equation of state: neutron star and strange star[J]. Nuclear Physics Review, 2019, **36**(1): 1 – 36. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.36.01.001.

86 Antoniadis J, Freire P C C, Wex N, *et al*. A massive pulsar in a compact relativistic binary[J]. Science, 2013, **340**(6131): 448, 1233232. DOI: 10.1126/science.1233232.

87 Demorest P B, Pennucci T, Ransom S M, *et al*. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay[J]. Nature, 2010, **467**(7319): 1081 – 1083. DOI: 10.1038/nature09466.

88 Kaplan D L, Bhalerao V B, van Kerkwijk M H, *et al*. A metal-rich low-gravity companion to a massive millisecond pulsar[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2013, **765**(2): 158. DOI: 10.1088/0004-637x/765/2/158.

89 Smits R, Lorimer D R, Kramer M, *et al*. Pulsar science with the five hundred metre Aperture Spherical Telescope [J]. Astronomy & Astrophysics, 2009, **505**(2): 919 – 926. DOI: 10.1051/0004-6361/200911939.

90 Gendreau K C, Arzoumanian Z, Okajima T. The Neutron

star Interior Composition ExploreR (NICER): an explorer mission of opportunity for soft X-ray timing spectroscopy [C]//SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation. Proceeding SPIE 8443, Space Telescopes and Instrumentation 2012: Ultraviolet to Gamma Ray, Amsterdam, Netherlands. 2012, **8443**: 322 – 329. DOI: 10.1117/12.926396.

91 Campana R, Feroci M, Del Monte E, *et al*. The LOFT (large observatory for X-ray timing) background simulations[C]//SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation. Proceeding SPIE 8443, Space Telescopes and Instrumentation 2012: Ultraviolet to Gamma Ray, Amsterdam, Netherlands. 2012, **8443**: 1636 – 1644. DOI: 10.1117/12.925999.

92 Raaijmakers G, Riley T E, Watts A L, *et al*. A NICER view of PSR J0030+0451: implications for the dense matter equation of state[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2019, **887**(1): L22. DOI: 10.3847/2041-8213/ab451a.

93 Riley T E, Watts A L, Bogdanov S, *et al*. A NICER view of PSR J0030+0451: millisecond pulsar parameter estimation[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2019, **887**(1): L21. DOI: 10.3847/2041-8213/ab481c.

94 Bogdanov S, Guillot S, Ray P S, *et al*. Constraining the neutron star mass-radius relation and dense matter equation of state with NICER. I. the millisecond pulsar X-ray data set[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2019, **887**(1): L25. DOI: 10.3847/2041-8213/ab53eb.

95 Guillot S, Kerr M, Ray P S, *et al*. NICER X-ray observations of seven nearby rotation-powered millisecond pulsars[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2019, **887**(1): L27. DOI: 10.3847/2041-8213/ab511b.

96 Miller M C, Lamb F K, Dittmann A J, *et al*. PSR J0030+0451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2019, **887**(1): L24. DOI: 10.3847/2041-8213/ab50c5.

97 Bogdanov S, Lamb F K, Mahmoodifar S, *et al*. Constraining the neutron star mass-radius relation and dense matter equation of state with NICER. II. emission from hot spots on a rapidly rotating neutron star[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2019, **887**(1): L26. DOI: 10.3847/2041-8213/ab5968.

98 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, *et al*. GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral[J]. Physical Review Letters, 2017, **119**(16): 161101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101.

99 Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, *et al*. Properties of the binary neutron star merger GW170817[J]. Physical Review X, 2019, **9**(1): 011001. DOI: 10.1103/PhysRevX.9.011001.

100 Nambu Y, Jona-Lasinio G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I[J]. Physical Review, 1961, **122**(1): 345 – 358. DOI: 10.1103/physrev.122.345.

101 Nambu Y, Jona-Lasinio G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II[J]. Physical Review, 1961, **124**(1): 246 – 254. DOI: 10.1103/physrev.124.246.

102 Klevansky S P. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics[J]. Reviews of Modern Physics, 1992, **64**(3): 649 – 708. DOI: 10.1103/revmodphys.64.649.

103 Hatsuda T, Kunihiro T. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian[J]. Physics Reports, 1994, **247**: 221 – 367. DOI: 10.1016/0370-1573(94)90022-1.

104 Hatsuda T, Kunihiro T. Soft modes associated with chiral symmetry breaking: the use of a QCD-motivated effective interaction[J]. Progress of Theoretical Physics, 1985, **74**(4): 765 – 781. DOI: 10.1143/PTP.74.765.

105 Wang F, Cao Y K, Zong H S. Novel self-consistent mean field approximation and its application in strong interaction phase transitions[J]. Chinese Physics C, 2019, **43**(8): 084102. DOI: 10.1088/1674-1137/43/8/084102.

106 Roberts C D, Schmidt S M. Dyson-Schwinger equations: Density, temperature and continuum strong QCD[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2000, **45**: S1 – S103. DOI: 10.1016/S0146-6410(00)90011-5.

107 Fischer C S. QCD at finite temperature and chemical potential from Dyson-Schwinger equations[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2019, **105**: 1 – 60. DOI: 10.1016/j.ppnp.2019.01.002.

108 Maris P, Roberts C D. π- and K-meson Bethe-Salpeter amplitudes[J]. Physical Review C, 1997, **56**(6): 3369 – 3383. DOI: 10.1103/physrevc.56.3369.

109 Maris P, Tandy P C. Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants[J]. Physical Review C, 1999, **60**(5): 055214. DOI: 10.1103/physrevc.60.055214.

110 Qin S X, Chang L, Chen H, *et al*. Phase diagram and critical end point for strongly interacting quarks[J]. Physical Review Letters, 2011, **106**(17): 172301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.172301.

111 Fischer C S, Luecker J. Propagators and phase structure of N_f=2 and N_f=2+1 QCD[J]. Physics Letters B, 2013, **718**(3): 1036 - 1043. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.11.054.

112 Fischer C S, Luecker J, Welzbacher C A. Phase structure of three and four flavor QCD[J]. Physical Review D, 2014, **90**(3): 034022. DOI: 10.1103/physrevd.90.034022.

113 Shi C, Du Y L, Xu S S, *et al*. Continuum study of the QCD phase diagram through an OPE-modified gluon propagator[J]. Physical Review D, 2016, **93**(3): 036006. DOI: 10.1103/physrevd.93.036006.

114 Wang B, Wang Y L, Cui Z F, *et al*. Effect of the chiral chemical potential on the position of the critical endpoint [J]. Physical Review D, 2015, **91**(3): 034017. DOI: 10.1103/physrevd.91.034017.

115 Fischer C S, Grüter B, Alkofer R. Solving coupled Dyson-Schwinger equations on a compact manifold[J]. Annals of Physics, 2006, **321**(8): 1918 - 1938. DOI: 10.1016/j.aop.2005.11.007.

116 Fan W K, Luo X F, Zong H S. Mapping the QCD phase diagram with susceptibilities of conserved charges within Nambu-Jona-Lasinio model[J]. International Journal of Modern Physics A, 2017, **32**(11): 1750061. DOI: 10.1142/s0217751x17500610.

117 Fan W K, Luo X F, Zong H S. Probing the QCD phase structure with higher order baryon number susceptibilities within the NJL model[J]. Chinese Physics C, 2019, **43**(3): 033103. DOI: 10.1088/1674-1137/43/3/033103.

118 Fan W K, Luo X F, Zong H S. Second to tenth order susceptibilities of conserved charges within a modified Nambu-Jona-Lasinio model[J]. Chinese Physics C, 2019, **43**(5): 054109. DOI: 10.1088/1674-1137/43/5/054109.

119 Shao G Y, Tang Z D, Gao X Y, *et al*. Baryon number fluctuations and the phase structure in the PNJL model[J]. The European Physical Journal C, 2018, **78**(2): 138. DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-5636-0.

120 Ferreira M, Costa P, Providência C. Presence of a critical endpoint in the QCD phase diagram from the net-baryon number fluctuations[J]. Physical Review D, 2018, **98**(3): 034006.

121 Li Z B, Xu K, Wang X Y, *et al*. The kurtosis of net baryon number fluctuations from a realistic Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model along the experimental freeze-out line [J]. The European Physical Journal C, 2019, **79**(3): 245. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6703-x.

122 Isserstedt P, Buballa M, Fischer C S, *et al*. Baryon number fluctuations in the QCD phase diagram from Dyson-Schwinger equations[J]. Physical Review D, 2019, **100**(7): 074011. DOI: 10.1103/physrevd.100.074011.

123 Zhao A M, Cui Z F, Jiang Y, *et al*. Nonlinear susceptibilities under the framework of Dyson-Schwinger equations[J]. Physical Review D, 2014, **90**(11): 114031. DOI: 10.1103/physrevd.90.114031.

124 Xin X Y, Qin S X, Liu Y X. Quark number fluctuations at finite temperature and finite chemical potential via the Dyson-Schwinger equation approach[J]. Physical Review D, 2014, **90**(7): 076006. DOI: 10.1103/physrevd. 90. 076006.

125 Fu W J, Luo X F, Pawlowski J M, *et al*. Hyper-order baryon number fluctuations at finite temperature and density[J]. Physical Review D, 2021, **104**(9): 094047. DOI: 10.1103/physrevd.104.094047.

126 Zhao A M, Luo X F, Zong H S. Baryon number fluctuations in quasi-particle model[J]. The European Physical Journal C, 2017, **77**(4): 207. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-4784-y.

127 Almási G A, Pisarski R D, Skokov V V. Volume dependence of baryon number cumulants and their ratios [J]. Physical Review D, 2017, **95**(5): 056015. DOI: 10.1103/physrevd.95.056015.

128 Aggarwal M M, Ahammed Z, Alakhverdyants A V, *et al*. Higher moments of net proton multiplicity distributions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2010, **105**: 022302. DOI: 10.1103/PhysRevLett. 105.022302.

129 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Beam energy dependence of moments of the net-charge multiplicity distributions in Au+Au collisions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(9): 092301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.092301.

130 Adam J, Adamczyk L, Adams J R, *et al*. Beam energy dependence of net-Λ fluctuations measured by the STAR experiment at RHIC[J]. Physical Review C, 2020, **102**: 024903. DOI: 10.1103/PhysRevC.102.024903.

131 Adamczyk L, Adams J R, Adkins J K, *et al*. Collision energy dependence of moments of net-kaon multiplicity distributions at RHIC[J]. Physics Letters B, 2018, **785**: 551 - 560. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.07.066.

132 Kitazawa M, Asakawa M. Revealing baryon number fluctuations from proton number fluctuations in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2012, **85**(2): 021901. DOI: 10.1103/physrevc.85.021901.

133 Kitazawa M, Asakawa M. Relation between baryon number fluctuations and experimentally observed proton

number fluctuations in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2012, **86**(2): 024904. DOI: 10.1103/physrevc.86.024904.

134 Hatta Y, Stephanov M A. Proton-number fluctuation as a signal of the QCD critical end point[J]. Physical Review Letters, 2003, **91**(10): 102003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.102003.

135 Athanasiou C, Rajagopal K, Stephanov M. Using higher moments of fluctuations and their ratios in the search for the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2010, **82** (7): 074008. DOI: 10.1103/physrevd.82.074008.

136 Borsanyi S, Fodor Z, Katz S D, *et al*. Freeze-out parameters from electric charge and baryon number fluctuations: is there consistency? [J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(5): 052301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.052301.

137 Borsányi S, Fodor Z, Katz S D, *et al*. Freeze-out parameters: lattice meets experiment[J]. Physical Review Letters, 2013, **111**(6): 062005. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.062005.

138 Cleymans J, Oeschler H, Redlich K, *et al*. Status of chemical freeze-out[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2006, **32**(12): S165 – S169. DOI: 10.1088/0954-3899/32/12/s21.

139 Begun V V, Vovchenko V, Gorenstein M I. Updates to the p+p and A+A chemical freeze-out lines from the new experimental data[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2017, **779**: 012080. DOI: 10.1088/1742-6596/779/1/012080.

140 Fukushima K, Kharzeev D E, Warringa H J. Chiral magnetic effect[J]. Physical Review D, 2008, **78**(7): 074033. DOI: 10.1103/physrevd.78.074033.

141 Fukushima K, Ruggieri M, Gatto R. Chiral magnetic effect in the Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model[J]. Physical Review D, 2010, **81**(11): 114031. DOI: 10.1103/physrevd.81.114031.

142 Chernodub M N, Nedelin A S. Phase diagram of chirally imbalanced QCD matter[J]. Physical Review D, 2011, **83** (10): 105008. DOI: 10.1103/physrevd.83.105008.

143 Ruggieri M. Critical end point of quantum chromodynamics detected by chirally imbalanced quark matter[J]. Physical Review D, 2011, **84**(1): 014011. DOI: 10.1103/physrevd.84.014011.

144 Yamamoto A. Chiral magnetic effect in lattice QCD with a chiral chemical potential[J]. Physical Review Letters, 2011, **107**(3): 031601. DOI: 10.1103/PhysRevLett. 107. 031601.

145 Wang B, Wang Y L, Cui Z F, *et al*. Effect of the chiral chemical potential on the position of the critical endpoint [J]. Physical Review D, 2015, **91**(3): 034017. DOI: 10.1103/physrevd.91.034017.

146 Xu S S, Cui Z F, Wang B, *et al*. Chiral phase transition with a chiral chemical potential in the framework of Dyson-Schwinger equations[J]. Physical Review D, 2015, **91**(5): 056003. DOI: 10.1103/physrevd.91.056003.

147 Shi C, He X T, Jia W B, *et al*. Chiral transition and the chiral charge density of the hot and dense QCD matter[J]. Journal of High Energy Physics, 2020, **2020**(6): 122. DOI: 10.1007/JHEP06(2020)122.

148 Blaschke D, Burau G, Kalinovsky Y L, *et al*. Finite T meson correlations and quark deconfinement[J]. International Journal of Modern Physics A, 2001, **16**(12): 2267 – 2291. DOI: 10.1142/s0217751x01003457.

149 Maris P, Tandy P C. Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants[J]. Physical Review C, 1999, **60**(5): 055214. DOI: 10.1103/physrevc.60.055214.

150 Shi C, Du Y L, Xu S S, *et al*. Continuum study of the QCD phase diagram through an OPE-modified gluon propagator[J]. Physical Review D, 2016, **93**(3): 036006. DOI: 10.1103/physrevd.93.036006.

151 Cui Z F, Cloët I C, Lu Y, *et al*. Critical end point in the presence of a chiral chemical potential[J]. Physical Review D, 2016, **94**(7): 071503. DOI: 10.1103/physrevd. 94.071503.

152 Yu L, Liu H, Huang M. Effect of the chiral chemical potential on the chiral phase transition in the NJL model with different regularization schemes[J]. Physical Review D, 2016, **94**(1): 014026. DOI: 10.1103/physrevd. 94. 014026.

153 Weller R D, Romatschke P. One fluid to rule them all: viscous hydrodynamic description of event-by-event central p+p, p+Pb and Pb+Pb collisions at s=5.02 TeV[J]. Physics Letters B, 2017, **774**: 351 – 356. DOI: 10.1016/j. physletb.2017.09.077.

154 Aidala C, Akiba Y, Alfred M, *et al*. Creating small circular, elliptical, and triangular droplets of quark-gluon plasma[J]. Nature Physics, 2019, **15**: 214 – 220. DOI: 10.1038/s41567-018-0360-0.

155 Shi C, Jia W B, Sun A, *et al*. Chiral crossover transition in a finite volume[J]. Chinese Physics C, 2018, **42**(2): 023101. DOI: 10.1088/1674-1137/42/2/023101.

156 Shi C, Xia Y H, Jia W B, *et al*. Chiral phase diagram of

strongly interacting matter at finite volume[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2018, **61**(8): 082021. DOI: 10.1007/s11433-017-9177-4.

157 Xu Y Z, Shi C, He X T, *et al*. Chiral crossover transition from the Dyson-Schwinger equations in a sphere[J]. Physical Review D, 2020, **102**(11): 114011. DOI: 10.1103/physrevd.102.114011.

158 Bernhardt J, Fischer C S, Isserstedt P, *et al*. Critical endpoint of QCD in a finite volume[J]. Physical Review D, 2021, **104**(7): 074035. DOI: 10.1103/physrevd. 104. 074035.

159 Bernhardt J, Fischer C S, Isserstedt P. Finite-volume effects in baryon number fluctuations around the QCD critical endpoint[EB/OL]. 2022: arXiv: 2208.01981. https://arxiv.org/abs/2208.01981.

160 Almási G A, Pisarski R D, Skokov V V. Volume dependence of baryon number cumulants and their ratios [J]. Physical Review D, 2017, **95**(5): 056015. DOI: 10.1103/physrevd.95.056015.

161 Cheng P, Luo X F, Ping J L, *et al*. Finite volume effects on the quarkonium dissociation temperature in an impenetrable QGP sphere[J]. Physical Review D, 2019, **100**: 014027. DOI: 10.1103/physrevd.100.014027.

162 Zhao Y P, Yin P L, Yu Z H, *et al*. Finite volume effects on chiral phase transition and pseudoscalar mesons properties from the Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model [J]. Nuclear Physics B, 2020, **952**: 114919. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2020.114919.

163 Duffy G, Ottewill A C. Rotating quantum thermal distribution[J]. Physical Review D, 2003, **67**(4): 044002. DOI: 10.1103/physrevd.67.044002.

164 Ambruş V E, Winstanley E. Rotating fermions inside a cylindrical boundary[J]. Physical Review D, 2016, **93** (10): 104014. DOI: 10.1103/physrevd.93.104014.

165 Zhang Z, Shi C, Luo X F, *et al*. Rotating fermions inside a spherical boundary[J]. Physical Review D, 2020, **102**(6): 065002. DOI: 10.1103/physrevd.102.065002.

166 Fulling S A. Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time[J]. Physical Review D, 1973, **7**(10): 2850 – 2862. DOI: 10.1103/physrevd.7.2850.

167 Unruh W G. Notes on black-hole evaporation[J]. Physical Review D, 1976, **14**(4): 870 – 892. DOI: 10.1103/physrevd.14.870.

168 Cook G B, Shapiro S L, Teukolsky S A. Rapidly rotating neutron stars in general relativity: realistic equations of state[J]. The Astrophysical Journal Letters, 1994, **424**: 823. DOI: 10.1086/173934.

169 Skokov V V, Illarionov A Y, Toneev V D. Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions[J]. International Journal of Modern Physics A, 2009, **24**(31): 5925 – 5932. DOI: 10.1142/s0217751x09047570.

170 Voronyuk V, Toneev V D, Cassing W, *et al*. Electromagnetic field evolution in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2011, **83**(5): 054911. DOI: 10.1103/physrevc.83.054911.

171 Deng W T, Huang X G. Event-by-event generation of electromagnetic fields in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2012, **85**(4): 044907. DOI: 10.1103/physrevc. 85.044907.

172 Duncan R C, Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts[J]. The Astrophysical Journal Letters, 1992, **392**: L9. DOI: 10.1086/186413.

173 Cao G Q. Recent progresses on QCD phases in a strong magnetic field: views from Nambu-Jona-Lasinio model [J]. The European Physical Journal A, 2021, **57**(9): 264. DOI: 10.1140/epja/s10050-021-00570-0.

174 McInnes B. Inverse magnetic/shear catalysis[J]. Nuclear Physics B, 2016, **906**: 40 – 59. DOI: 10.1016/j.nuclphysb. 2016.02.027.

175 Fortin M, Providência C, Raduta A R, *et al*. Neutron star radii and crusts: uncertainties and unified equations of state[J]. Physical Review C, 2016, **94**(3): 035804. DOI: 10.1103/physrevc.94.035804.

176 Akmal A, Pandharipande V R, Ravenhall D G. Equation of state of nucleon matter and neutron star structure[J]. Physical Review C, 1998, **58**(3): 1804 – 1828. DOI: 10.1103/physrevc.58.1804.

177 Douchin F, Haensel P. A unified equation of state of dense matter and neutron star structure[J]. Astronomy & Astrophysics, 2001, **380**(1): 151 – 167. DOI: 10.1051/0004-6361:20011402.

178 Masuda K, Hatsuda T, Takatsuka T. Hadron-quark crossover and massive hybrid stars[J]. Progress of Theoretical and Experimental Physics, 2013, **2013**(7): 073D01. DOI: 10.1093/ptep/ptt045.

179 Li C M, Yan Y, Geng J J, *et al*. Constraints on the hybrid equation of state with a crossover hadron-quark phase transition in the light of GW170817[J]. Physical Review D, 2018, **98**(8): 083013. DOI: 10.1103/physrevd. 98. 083013.

180 Itoh N. Hydrostatic equilibrium of hypothetical quark stars [J]. Progress of Theoretical Physics, 1970, **44**(1): 291 – 292. DOI: 10.1143/PTP.44.291.

181 Terazawa H. Super-hypernuclei in the quark-shell model [J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1979, **58** (3555): 1989.

182 Bodmer A R. Collapsed nuclei[J]. Physical Review D, 1971, **4**(6): 1601 – 1606. DOI: 10.1103/physrevd.4.1601.

183 Witten E. Cosmic separation of phases[J]. Physical Review D, 1984, **30**(2): 272 – 285. DOI: 10.1103/physrevd.30.272.

184 Li B L, Cui Z F, Yu Z H, *et al*. Structures of the strange quark stars within a quasiparticle model[J]. Physical Review D, 2019, **99**(4): 043001. DOI: 10.1103/physrevd.99.043001.

185 Wang Q Y, Zhao T, Zong H S. On the stability of two-flavor and three-flavor quark matter in quark stars within the framework of NJL model[J]. Modern Physics Letters A, 2020, **35**(39): 2050321. DOI: 10.1142/s0217732320503216.

186 Li B L, Yan Y, Ping J L. Strange quark mass dependence of strange quark star properties[J]. The European Physical Journal C, 2021, **81**(10): 921. DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09657-w.

187 Li B L, Yan Y, Ping J L. Tidal deformabilities and radii of strange quark stars[J]. Physical Review D, 2021, **104**(4): 043002. DOI: 10.1103/physrevd.104.043002.

188 Li B L, Yan Y, Ping J L. Hadron-quark crossover and hybrid stars with quark core[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2022, **49**(4): 045201. DOI: 10.1088/1361-6471/ac4ea1.

189 Xu S S. Phase structures of neutral dense quark matter and application to strange stars[J]. Chinese Physics C, 2022, **46**(1): 014105. DOI: 10.1088/1674-1137/ac2f95.

190 Li B L, Yan Y, Kang G Z, *et al*. Properties of hybrid stars with hadron-quark crossover[J]. Modern Physics Letters A, 2022, **37**(12): 2250074. DOI: 10.1142/S0217732322500742.

191 Holdom B, Ren J, Zhang C. Quark matter may not be strange[J]. Physical Review Letters, 2018, **120**(22): 222001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.222001.

192 Yang L K, Luo X F, Zong H S. QCD phase diagram in chiral imbalance with self-consistent mean field approximation[J]. Physical Review D, 2019, **100**(9): 094012. DOI: 10.1103/physrevd.100.094012.

193 Yu Z X, Zhao T, Zong H S. Self-consistent mean field approximation and application in three-flavor NJL model [J]. Chinese Physics C, 2020, **44**(7): 074104. DOI: 10.1088/1674-1137/44/7/074104.

194 Su L Q, Shi C, Huang Y F, *et al*. Hybrid stars can be self-bound[J]. Physical Review D, 2021, **103**(9): 094037. DOI: 10.1103/physrevd.103.094037.

195 Wang Q W, Shi C, Zong H S. Nonstrange quark stars from an NJL model with proper-time regularization[J]. Physical Review D, 2019, **100**(12): 123003. DOI: 10.1103/physrevd.100.123003.

196 Zhao T, Zheng W, Wang F, *et al*. Do current astronomical observations exclude the existence of nonstrange quark stars?[J]. Physical Review D, 2019, **100**(4): 043018. DOI: 10.1103/physrevd.100.043018.

197 Capano C D, Tews I, Brown S M, *et al*. Stringent constraints on neutron-star radii from multimessenger observations and nuclear theory[J]. Nature Astronomy, 2020, **4**(6): 625 – 632. DOI: 10.1038/s41550-020-1014-6.

198 Yuan W L, Li A, Miao Z Q, *et al*. Interacting ud and uds quark matter at finite densities and quark stars[J]. Physical Review D, 2022, **105**(12): 123004. DOI: 10.1103/physrevd.105.123004.

199 Adamczyk L, Aboona B E, Adam J, *et al*. Beam energy dependence of fifth and sixth-order net-proton number fluctuations in Au+Au collisions at RHIC[EB/OL]. 2022: arXiv: 2207.09837. https://arxiv.org/abs/2207.09837.

200 Geng J J, Li B, Huang Y F. Repeating fast radio bursts from collapses of the crust of a strange star[J]. The Innovation, 2021, **2**(4): 100152. DOI: 10.1016/j.xinn.2021.100152.